广东工程职业技术学院
UANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

经济数学

课程类型：专业基础课

授课对象：高职一年级学生

授课教师：张秀娟

《经济数学》——公司经济事项分析

项目3　生产和经营状况分析

3.3.2　运用最值进行成本最低生产方案决策的方法

4 函数的最值

连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值的计算方法与步骤如下：

（1）求 $f'(x)$，并求出函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点和 $f'(x)$ 不存在的点；

（2）计算出驻点、导数不存在的点以及区间端点处的函数值；

（3）比较上述各函数值的大小，其中最大者就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，最小者就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

例5.3.4

求函数 $f(x)=x^4-8x^2+2$ 在$[-1,\ 3]$上的最大值和最小值.

解

（1） $f'(x)=\left(x^4-8x^2+2\right)'=4x^3-16x=4x\left(x^2-2^2\right)=4x(x+2)(x-2)$；

（2）得驻点是， $x_1=-2, x_2=0, x_3=2$；

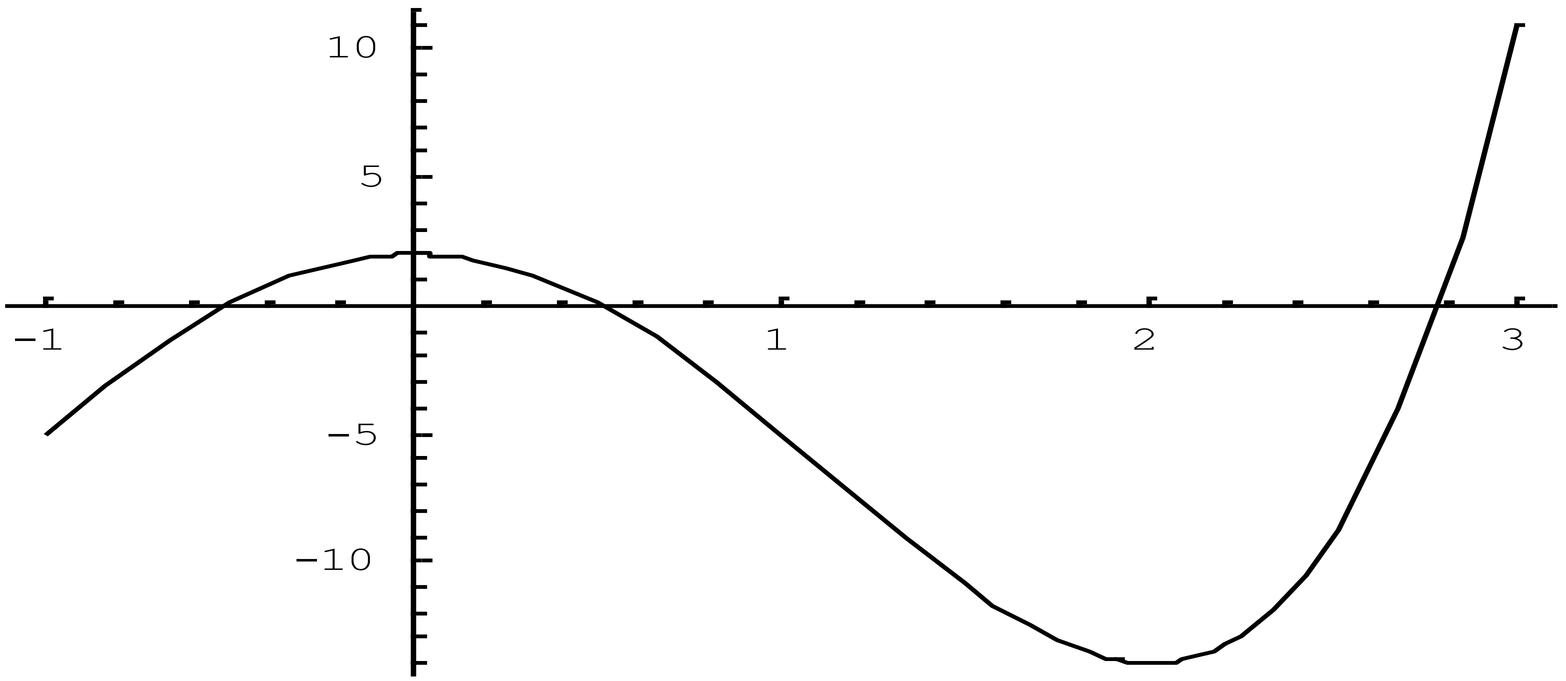
（3）计算[-1, 3]内各驻点和端点的函数值，并比较它们的大小，最大的为最大值，最小的为最小值， $f(-1)=-5, f(0)=2, f(2)=-14, f(3)=11$；

（4）根据（3）的结果得出，函数在[-1, 3]内最大值为 f(3)=11，最小值为 f(2)=—14.

例5.3.4

求函数 $f(x)=x^4-8x^2+2$ 在 $[-1,\ 3]$ 上的最大值和最小值.

解



1 平均成本最低的分析原理与方法

平均成本达到最低的条件

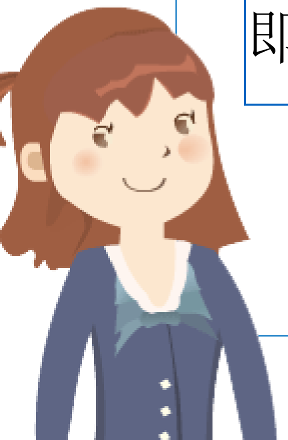
不妨假设在产量达到q时，平均成本最小，则

$$\bar{C}'(q)=0\text{，且 }\bar{C}''(q)>0$$

而
$$\bar{C}'(q)=\left[\frac{C(q)}{q}\right]'=\frac{1}{q}\left[C'(q)-\frac{C(q)}{q}\right]=\frac{1}{q}\left[MC-\bar{C}(q)\right]=0,$$

因此有
$$MC-\bar{C}(q)=0\text{，}\quad MC=C'(q)=\bar{C}(q)$$

即：边际成本 MC 等于平均成本 $\bar{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$ 时，才有可能为最小值.



训练任务1　　公司平均成本最低生产方案决策

宏运公司的产品的总成本 C 是产量 q 的函数 $C=C(q)=10000+50q+q^2$，试进行使平均成本最低的产量及最低平均成本分析.

任务实施1　　公司平均成本最低生产方案决策

宏运公司的产品的总成本 C 是产量 q 的函数 $C=C(q)=10000+50q+q^2$，试进行使平均成本最低的产量及最低平均成本分析.

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=q+50+\frac{10000}{q},\quad q>0$$

$$\overline{C}'(q)=1-\frac{10000}{q^2}\quad \overline{C}''(q)=\frac{20000}{q^3}$$

令 $\overline{C}'(q)=0$ 得唯一驻点 $q=100$，且 $\overline{C}''(100)>0$

故当产量为 100 单位时，平均成本最低，最低平均成本是 $\overline{C}(100)=25000$ 单

知识迁移

经济最优化问题

税收最大

【例 5. 4. 4】设某种产品的总收入函数和总成本函数分别为

$$R(q)=30q-3q^2,\quad C(q)=q^2+2q+2,$$

企业追求最大利润，政府对产品征税，每单位产品须向国家交税为 t ．求：

（1）企业纳税前的最大利润及此时的产量和价格；

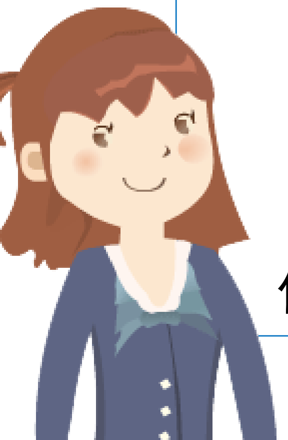
（2）征税收入最大值及此时的税率 t；（3）企业纳税后的最大利润及此时产品的价格．

解

（1）纳税前，利润函数是 $L(q)=R(q)-C(q)=-4q^2+28q-2$

$L'(q)=-8q+28,\quad L''(q)=-8<0$　　令 $L'(q)=0,$　得 $q=\dfrac{7}{2}=3.5$

所以，当产量 $q=3.5$ 单位时，可获得最大利润，最大利润 $L(3.5)=47$ ．此时产品的价格 $p=\left.\dfrac{R(q)}{q}\right|_{q=3.5}=19.5$ ．



知识迁移

经济最优化问题

04 税收最大

解

（2）征税收入函数是 $T(q)=tq$

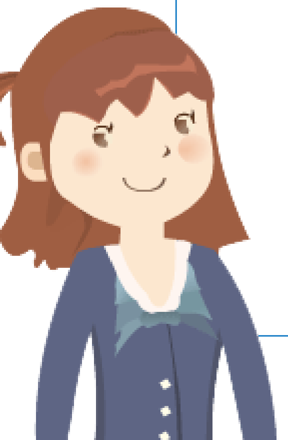
纳税后，利润函数是 $L(q)=R(q)-C(q)-T(q)=-4q^2+(28-t)q-2$

$$L'(q)=-8q+28-t,\qquad L''(q)=-8<0$$

令 $L'(q)=0$，得 $q=\dfrac{28-t}{8}$

所以纳税后，企业获最大利润的产量是 $q=\dfrac{28-t}{8}$，此时征税收入函数是

$$T(q)=t\cdot\frac{28-t}{8}=\frac{1}{8}(28t-t^2)$$



知识迁移

经济最优化问题

04 税收最大

解

$$T'(q)=\frac{1}{8}(28-2t)=\frac{1}{4}(14-t),\quad T''(q)=-\frac{1}{4}<0$$

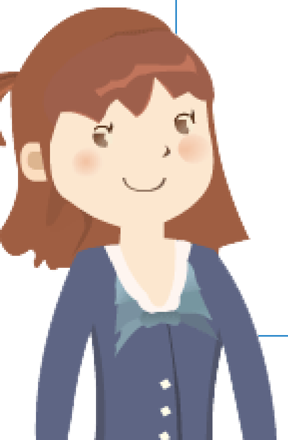
令 $T'(q)=0$，得 $t=14$

所以当税率 $t=14$ 时，征税收入最大，税收最大值是 $T(14)=24.5$.

（3）税收最大时的税率 $t=14$，于是利润最大时的产量 $q=\frac{7}{4}=1.75$，

所以企业纳税后的最大利润是 $L(1.75)=10.25$，此时，产品的价格是

$$p=\frac{R(q)}{q}\bigg|_{q=1.75}=\frac{99}{4}=24.75.$$



06 广告策略最优

【例 5.4.6】某企业为扩大产品的知名度，增加甲类产品的销售量，适当地进行广告宣传，若每件甲类产品的利润为 1000 元，每月的平均广告费为 x 元，设销售量 Q 是广告费 x 的函数

$$Q = 400(1 - e^{-0.01x}),$$

求使纯利润最大时的最佳广告开支.

解

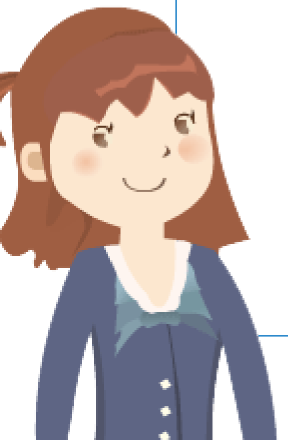
纯利润为 $L(x) = 1000Q - x = 400000(1 - e^{-0.01x}) - x$

$$L'(x) = 4000e^{-0.01x} - 1$$

令 $L'(x) = 0$, 得 $x = 829$ (元)　　$L''(x) = -40e^{-0.01x} < 0$

即 $x = 829$ 是 $L(x)$ 的唯一极值点，而且是极大值点，此时最大利润为

$$L(829) = 400000(1 - e^{-8.29}) - 829 = 399071 \text{（元）}$$



经济最优化问题

06 广告策略最优

【例 5. 4. 7】某服装设计公司的收入 R 与杂志广告费用 x（万元）和电视广告费用 y（万元）之间有经验公式：

$$R = 100 + 20x + 40y + 10xy$$

如果广告费用计划投入 100 万元，求相应的广告最优策略.

解

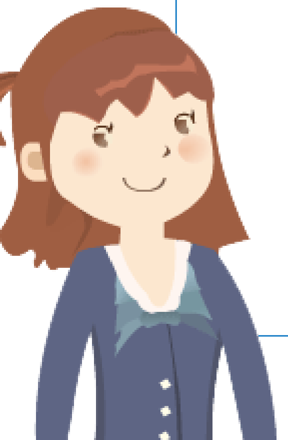
由于广告费用计划投入 100 万元，可得条件 $x + y = 100$，构造辅助函数

$$L(x, y) = 100 + 20x + 40y + 10xy + \lambda(x + y - 100),$$

再解方程组

$$\begin{cases} L'_x = 20 + 10y + \lambda = 0 \\ L'_y = 40 + 10x + \lambda = 0 \\ x + y - 100 = 0 \end{cases}$$

得唯一可能极值点（49，51），根据问题的实际意义知，当 49 万元用于杂志广告费用，而其余的 51 万元用于电视广告费用时可使收入最高.



07 存款利率最佳

【例 5.4.8】某银行准备新设某种定期存款业务，假设存款量与利率成正比，经预测贷款投资的收益率为 10%，那么存款利率定为多少时，才能收到最高的贷款纯收益 .

解

设存款利率为 x，存款总额为 M，由于 M 与 x 成正比，则

$M = kx$（k 是正常数）

贷款总额为 M 时的收益为 $0.10M = 0.10kx$

而这笔款 M 要付的利息为 $xM = kx^2$

因此，投资纯收益为 $f(x) = 0.10kx - kx^2$

令 $f'(x) = 0.10k - 2kx = 0$，得 $x = 0.05$ 又 $f''(0.05) = -2k < 0 \quad (k > 0)$

即 $x = 0.05$ 是 $f(x)$ 的唯一极值点，而且是极大值点. 因此，当存款利率为 5%时，可创最高纯投资收益.

知识迁移

经济最优化问题

08 时间的最佳选择

【例 5. 4. 8】设有某种商品，若现时$(t=0)$出售，售价为A元；若储藏一定时期（不计可高价出售．已知该商品的未来售价y是时间t（单位：年）的函数

$$y=Ae^{0.5\sqrt{t}},$$

又设资金的贴现率为 5%，按连续复利计算，为使利润最大，该商品应在何时出售？

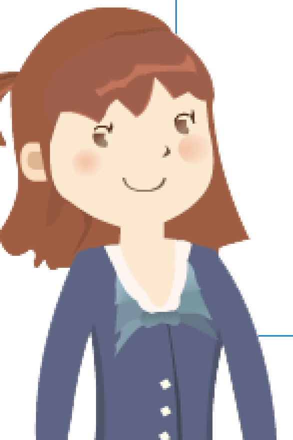
解

该商品储藏t年后出售，销售收入的现值是

$$L(t)=ye^{-0.05t}=Ae^{0.5\sqrt{t}-0.05t},$$

$$L'(t)=Ae^{0.5\sqrt{t}-0.05t}\cdot\left(\frac{1}{4\sqrt{t}}-0.05\right)=Ae^{0.5\sqrt{t}-0.05t}\cdot\frac{5-\sqrt{t}}{20\sqrt{t}}=\begin{cases}>0, & 0<t<25\\ =0, & t=25\\ <0, & t>25\end{cases}$$

所以，$t=25$时$L(t)$取最大值，即：为使利润最大，最佳储藏时间为 25 年．



小结

1. 可以利用导数工具进行成本最低生产方案决策规划
2. 经济最优化问题

谢谢

$y=x^2$
$x=y^2$
原式$=\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy$
$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^5)\,dx$
$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6)\Big|_0^1$
$=\frac{1}{12}$