



广东工程职业技术学院

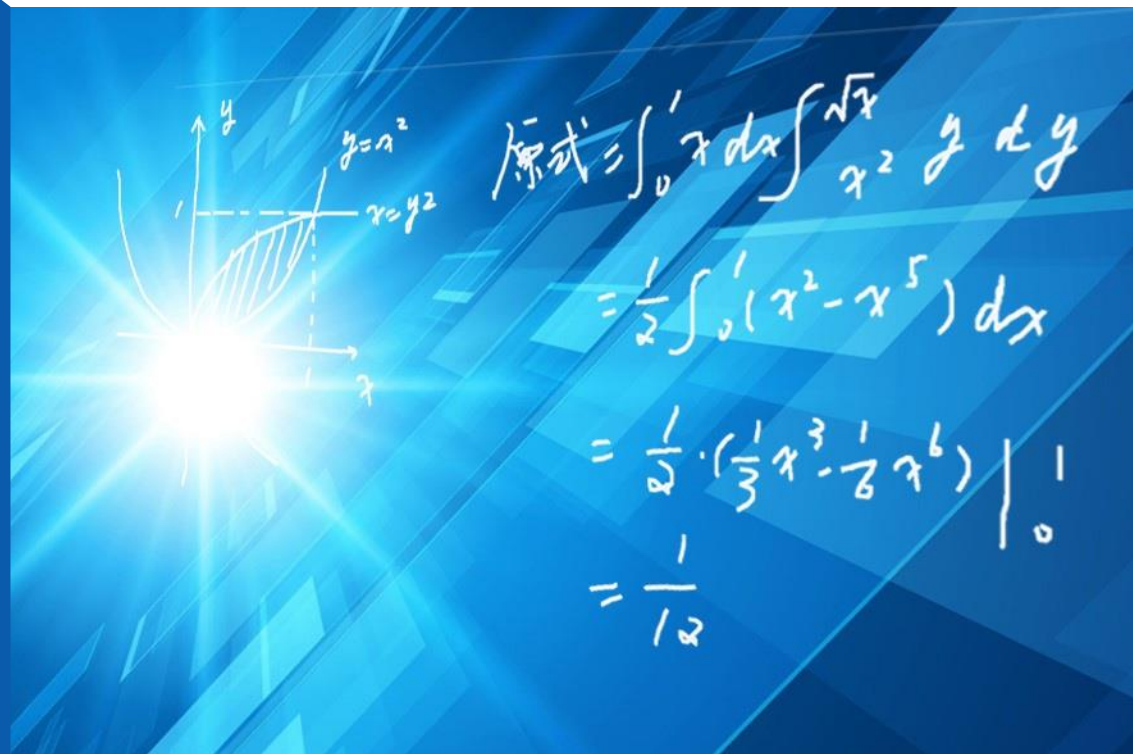
GUANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

经济数学

课程类型：专业基础课

授课对象：高职一年级学生

授课教师：张秀娟





广东工程职业技术学院

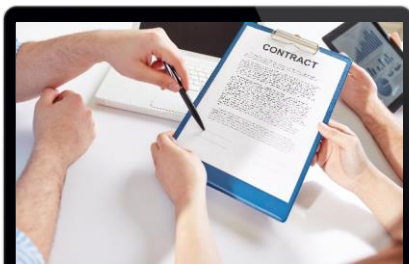
GUANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

《经济数学》——公司经济事项分析

——项目3.3 生产和经营状况分析——

3.3.3.1 导数工具的运用方法

训练任务1 公司利润最大时两种生产要素的投入水平分析

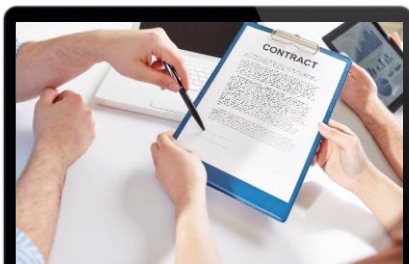


某公司的生产函数是 $Q = 8L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}}$ ，若两种生产要素的投入价格分别是 $p_L = 4$ ， $p_K = 8$ ，而产品的价格 $p = 4$ ，试求使利润最大的两种要素的投入水平、产出水平和最大利润。



训练任务2

公司在一定产量限制条件下成本最低分析



设亚诺公司某产品的生产函数和成本函数分别为

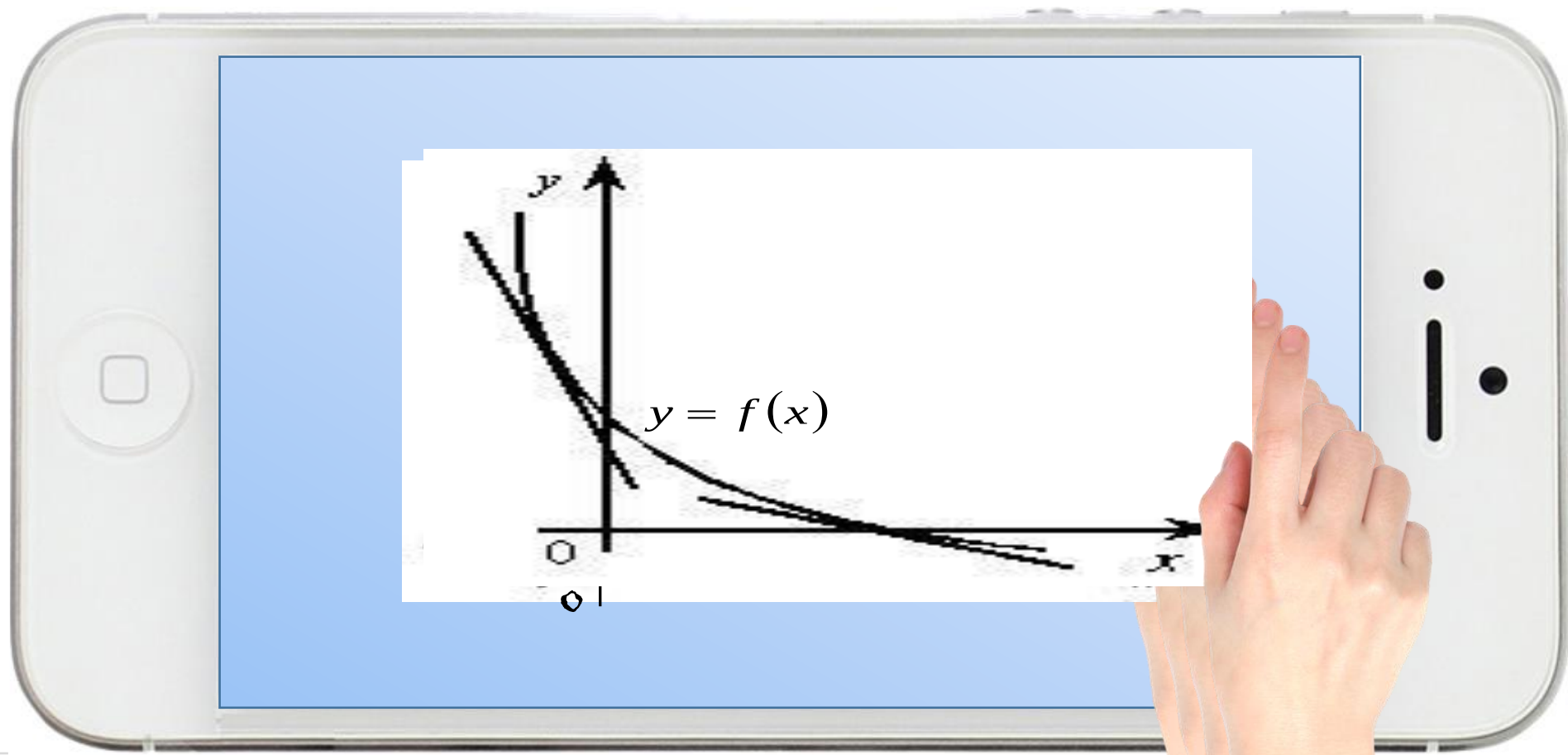
$$Q = 8L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}, \quad C = 2K + 12L$$

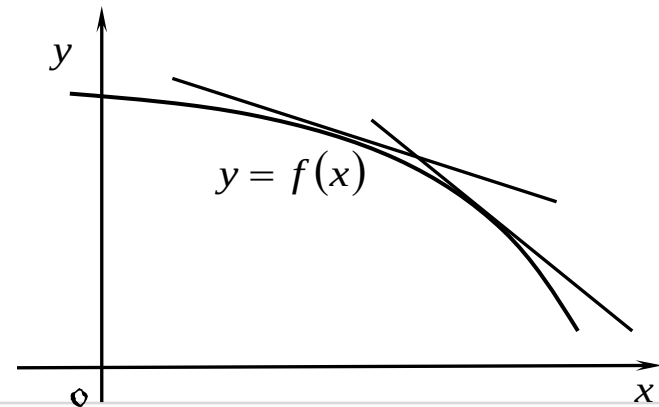
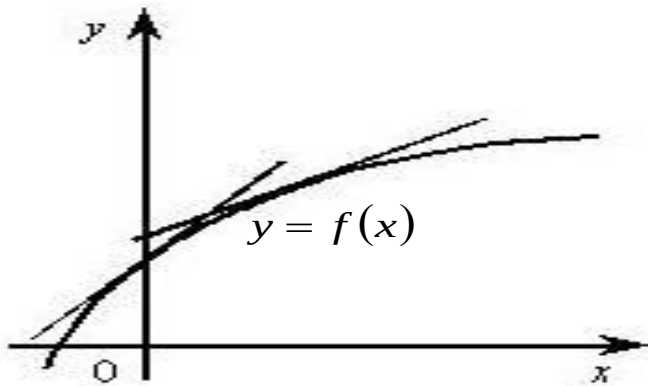
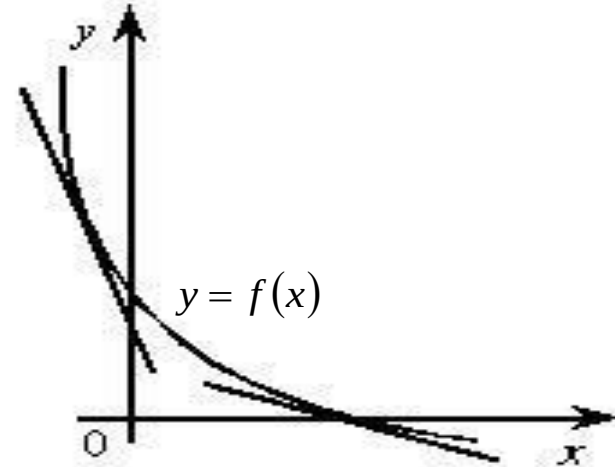
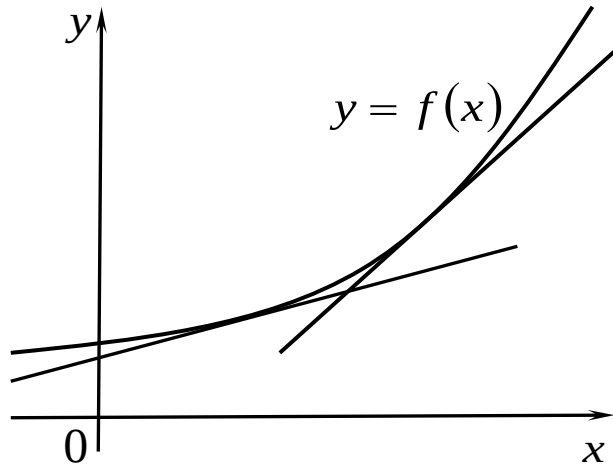
若产量 Q 为 16, 求使成本最低时两种要素的投入量及最低成本.



3.3.1

函数的单调性





定理 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内连续, 在 (a, b) 内可导.

- (1) 如果当 $x \in (a, b)$ 时有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调增加;
- (2) 如果当 $x \in (a, b)$ 时有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调减少.



一般地有，函数单调区间的分界点一定是函数的驻点或不可导点. 使 $f'(x) = 0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点.

讨论函数 $f(x)$ 的单调性可按以下步骤进行：

- (1) 确定函数的定义域区间；
- (2) 求函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ ，并求出函数的驻点和不可导点；
- (3) 用驻点和不可导点将定义域区间划分为若干个小区间，判断每个小区间内导数 $f'(x)$ 的符号；
- (4) 根据定理写出结论.



例5.2.1



利用导数判断函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ 的单调性.

解

函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$, $f'(x)$ 处处存在, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $f(x)$ 的驻点是 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

驻点 x_1, x_2 将定义域分成三个小区间, 为明确起见, 现列表讨论在这三个小区间内 $f'(x)$ 的符号和 $f(x)$ 的单调性, 如下表所示.

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	—	+
$f(x)$	↗	↘	↗

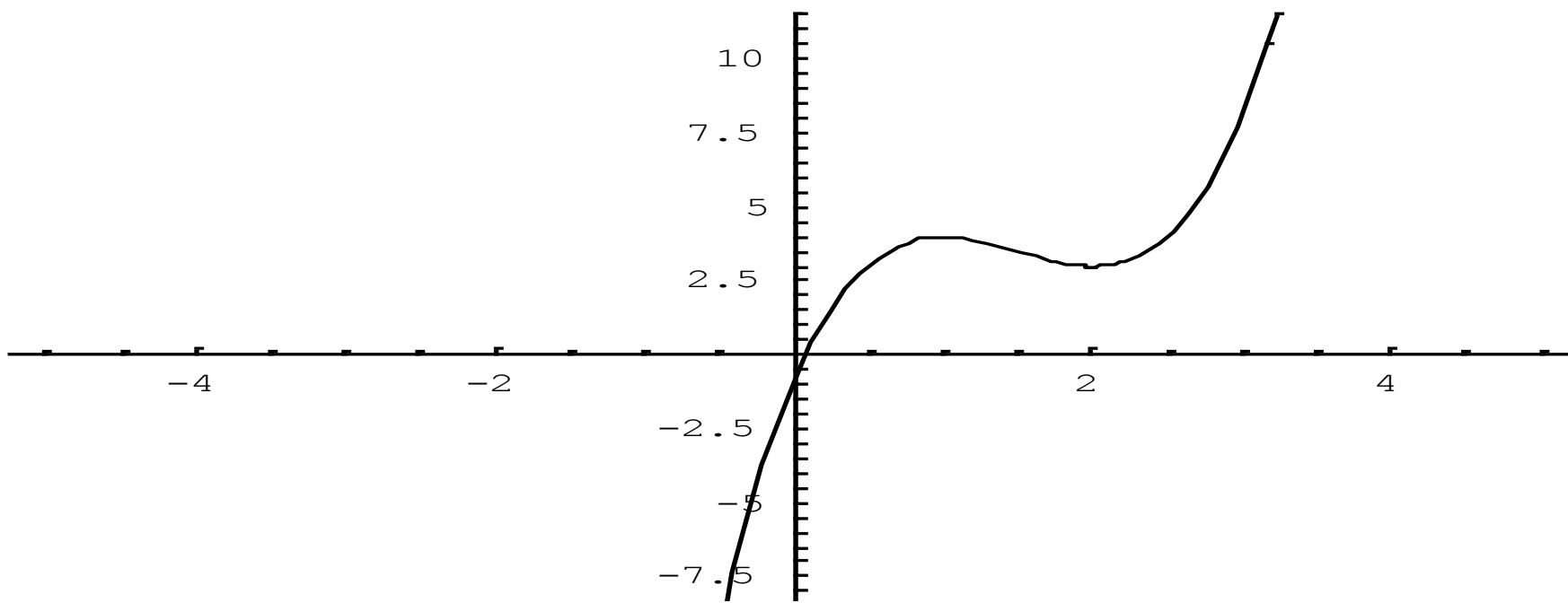
所以, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 和 $(2, +\infty)$ 内单调增加, 在区间 $(1, 2)$ 内单调减少.



例5.2.1



利用导数判断函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$ 的单调性.



高阶导数

如 $f(x) = x^4$, 有 $f'(x) = 4x^3$

一阶导数

$$f''(x) = 12x^2$$

二阶导数

$$f'''(x) = 24x$$

三阶导数

$$f^{(4)}(x) = 24, \dots$$

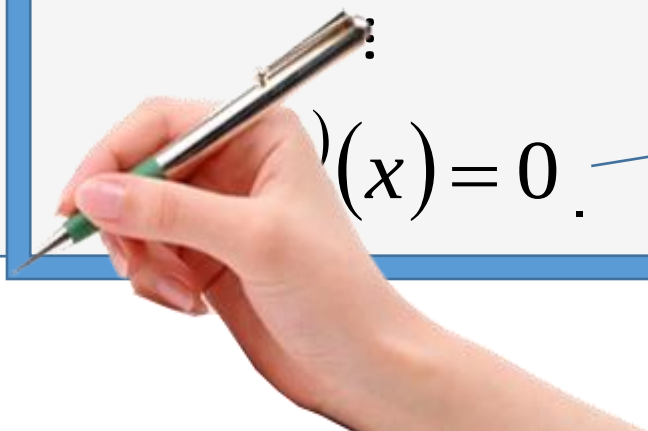
四阶导数

⋮

$$f^{(n)}(x) = 0$$

n阶导数

高阶
导数

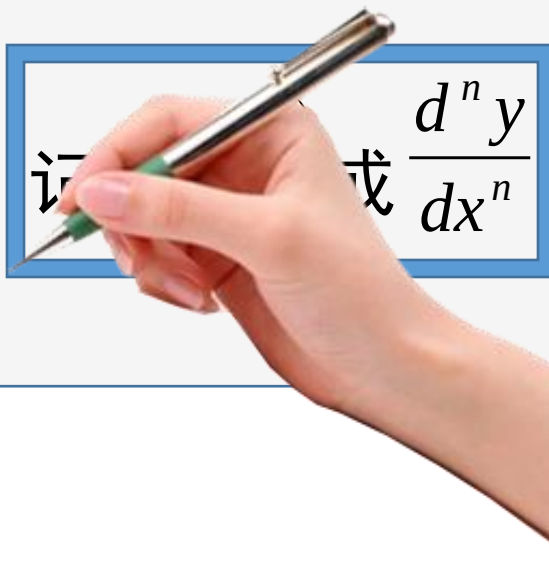


高阶导数

对于函数 $y = f(x)$ ，如果其导数 $y' = f'(x)$ 仍可导，则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的二阶导数，记为 $f''(x)$ 或 y'' 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

类似地，二阶导数的导数叫做三阶导数，……，一般地， $n-1$

阶导数的导数叫做 n 阶导数，记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$ ，并把二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数。



【例4.3.1】高阶导数



已知函数 $y = 5x^4 + 3x^3 - 2x + 8$ ，求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

解

$$y' = 20x^3 + 9x^2 - 2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = 60x^2 + 18x$$



【例4.3.2】高阶导数



已知函数 $f(x) = (3x + 1)^{10}$ ，求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

解

$$f'(x) = 30(3x + 1)^9,$$

$$f''(x) = 810(3x + 1)^8,$$

$$f'''(x) = 8 \times 810(3x + 1)^7,$$

$$f'''(0) = 8 \times 810 \times (3 \times 0 + 1)^7 \times 3 = 19440$$



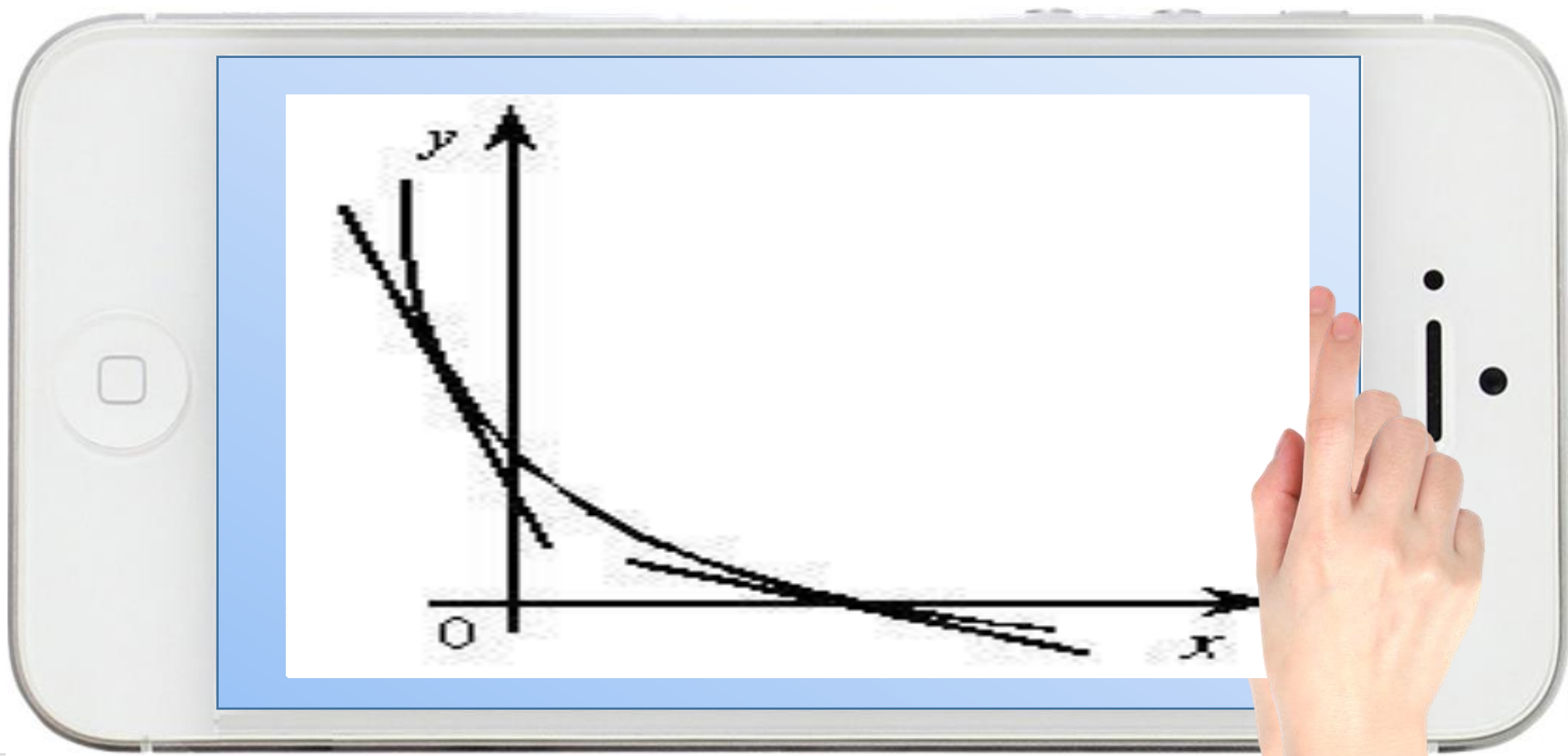
【例4.3.3】高阶导数



已知函数 $f(x) = e^x$ ，求 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 。

解





显然，下方左图中的上升曲线是凸的，表明该曲线上升的趋势渐渐缓慢；下方右图中的下降曲线是凹的，表明该曲线下降的趋势逐渐加快。

曲线凹与凸的分界点称为曲线的拐点。



若曲线向上弯曲的弧段位于其上任一点处切线的上方，称此区间上曲线是凹的；此时，曲线上各点切线的斜率随着 x 的增大而增大，即 $f'(x)$ 是单调增加的，从而 $f''(x) > 0$ ，这表明该曲线上升的趋势逐渐加快.

若曲线向下弯曲的弧段位于其上任一点处切线的下方，称此区间上曲线是凸的；此时，曲线上各点切线的斜率随着 x 的增大而减少，即 $f'(x)$ 是单调减少的，从而 $f''(x) < 0$ ，这表明该曲线下降的趋势渐渐缓慢.



定理 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有二阶导数.

若 $x \in (a, b)$ 时 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凹的; 若 $x \in (a, b)$ 时 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的.

显然, 在拐点左右两侧近旁 $f''(x)$ 必异号.



确定曲线的拐点坐标或判断曲线凹凸性的步骤如下：

- (1) 写出 $f(x)$ 的定义域；
- (2) 求二阶导数 $f''(x)$ ，并求出使 $f''(x)=0$ 的点和使 $f''(x)$ 不存在的点；
- (3) 用上述各点将定义域分成若干个小区间，并判断每个小区间内 $f''(x)$ 的符号；
- (4) 根据定理及拐点的定义写出结论。



例5.2.2



讨论曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 3$ 的凹凸性，并求拐点坐标.

解

函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

$$\because y' = 4x^3 - 6x^2 \quad \therefore y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$$

令 $y'' = 0$ ，得 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 1$ ，列表讨论如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	—	0	+
y	∪	拐点 (0, 3)	∩	拐点 (1, 2)	∪

由此可知，该曲线在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是凹的，在区间 $(0, 1)$ 上是凸的，点 $(0, 3)$ 和点 $(1, 2)$ 是该曲线的拐点.

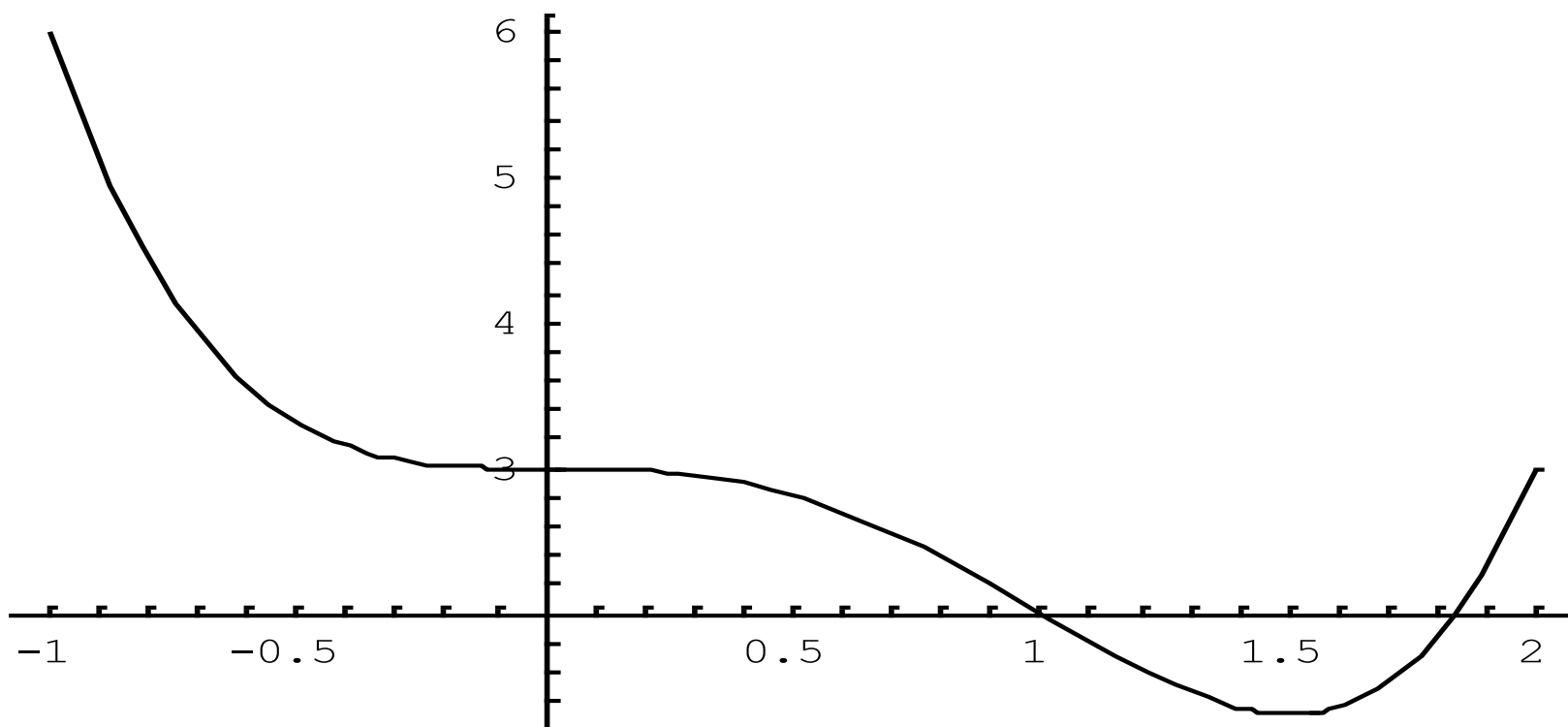


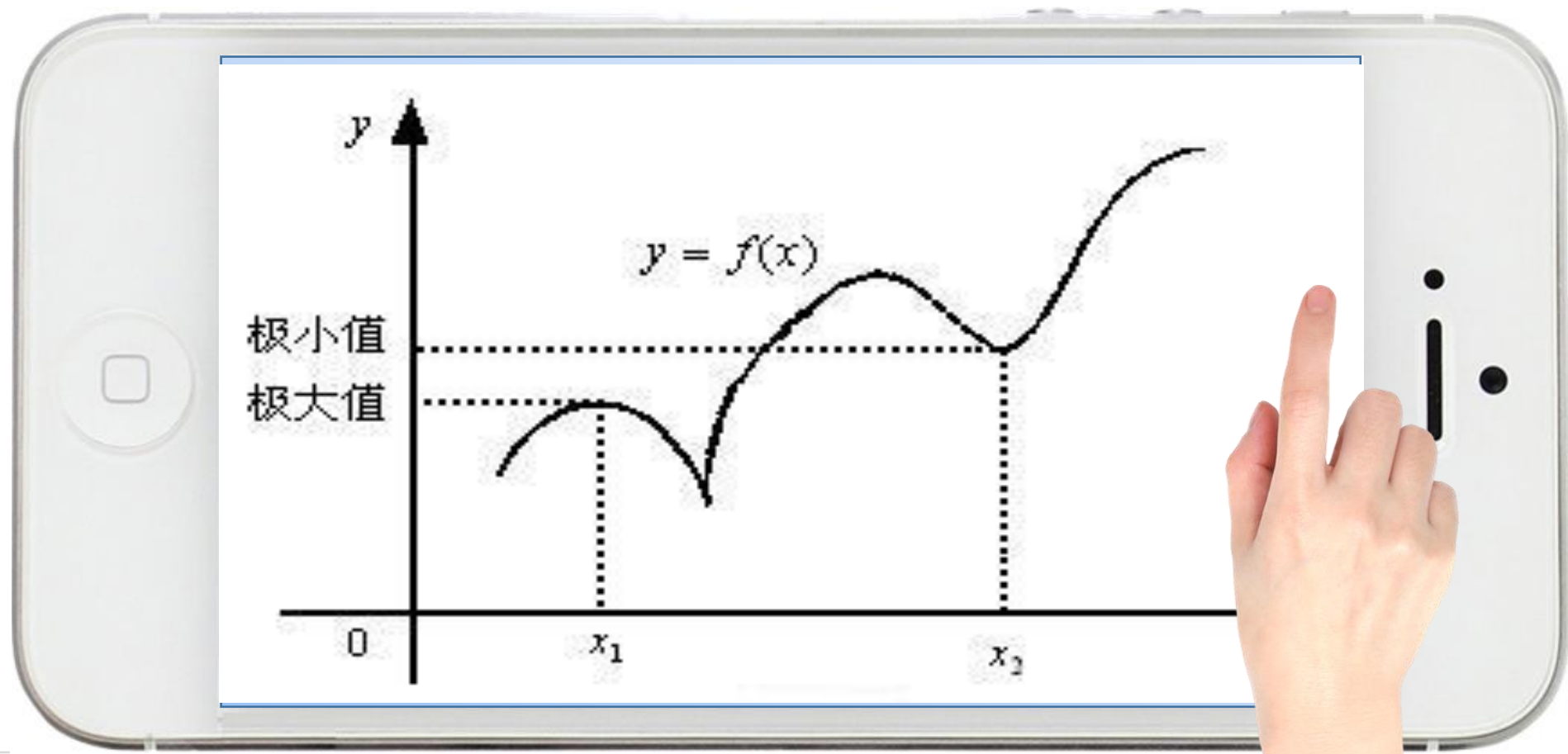
例5.2.2



讨论曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 3$ 的凹凸性，并求拐点坐标.

解





讨论：

①函数在其极大（小）值点两侧的单调性变化情况；

②函数的极值点与函数的驻点或导数 $f'(x)$ 存在的点之前的关系.



定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义, x 是 x_0 附近且异于 x_0 的任意点.

(1) 如果 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值, 称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 如果 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值, 称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

函数的极大值和极小值统称为函数的极值; 极大值点和极小值点统称为函数的极值点.



定理（极值的必要条件） 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导且取得极值，则必有 $f'(x) = 0$ 。



定理（极值的第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且在点 x_0 附近可导（ $f'(x_0)$ 可以不存在），

（1）若当 x 取 x_0 左侧附近值时 $f'(x) > 0$ ，而当 x 取 x_0 右侧附近值时 $f'(x) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

（2）若当 x 取 x_0 左侧附近值时 $f'(x) < 0$ ，而当 x 取 x_0 右侧附近值时 $f'(x) > 0$ ，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值；

（3）如果当 x 取遍 x_0 左右附近值时， $f'(x)$ 不改变符号，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有极值。



例5.3.1



求函数 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1$ 的极值.

解

函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

令 $f'(x) = 0$, 得函数的驻点是 $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, 函数无不可导点, 列表讨论如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	+
$f(x)$	↘	极小值 -2	↗	无极值	↗

从此表可知, 函数 $f(x)$ 在点 $x_1 = -1$ 处取得极小值 $f(-1) = -2$, 函数没有极大值.

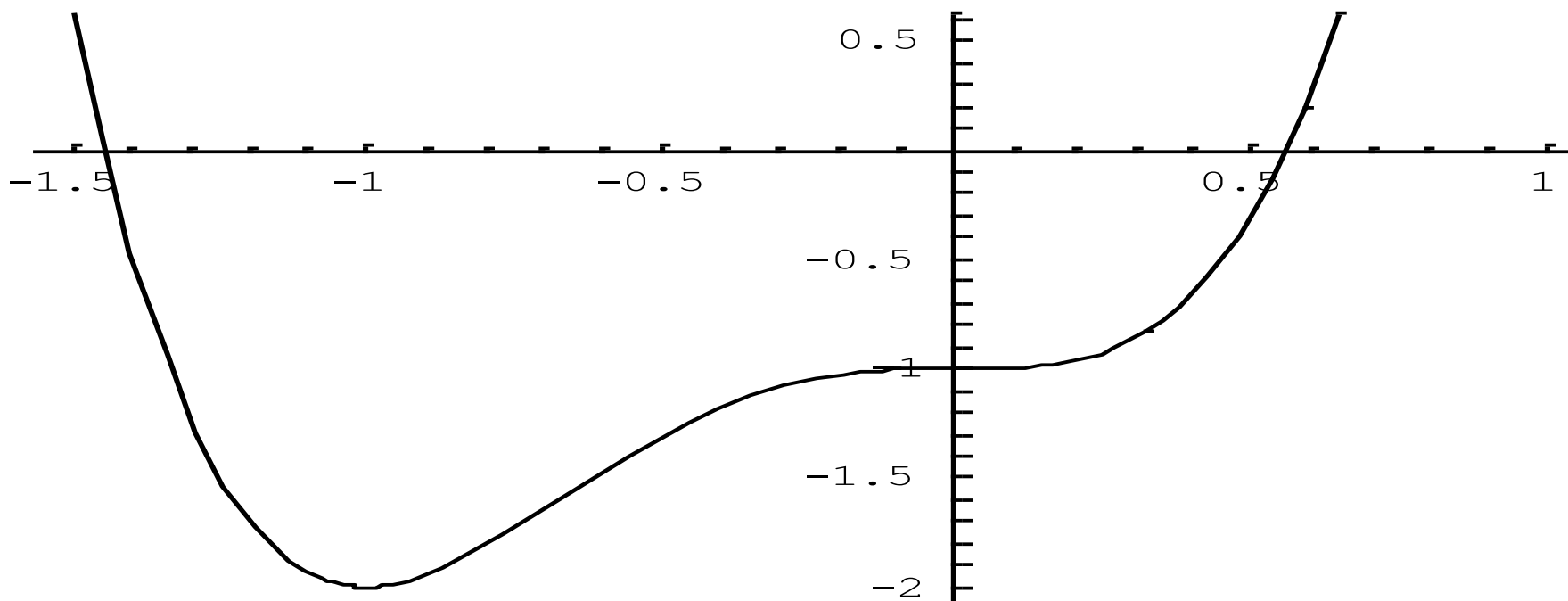


例5.3.1



求函数 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1$ 的极值.

解



定理（极值的第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数存在，
且 $f'(x_0) = 0$ ， $f''(x_0) \neq 0$ 。

(1) 如果 $f''(x_0) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

(2) 如果 $f''(x_0) > 0$ ，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值。



例5.3.2



求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 31$ 的极值.

解

函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3),$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $f(x)$ 的驻点是 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

计算 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数值, 易得 $f''(-1) < 0$, $f''(3) > 0$, 因此函数在点 $x_1 = -1$ 处取得极大值 $f(-1) = 36$, 在点 $x_2 = 3$ 处取得极小值 $f(3) = 4$.

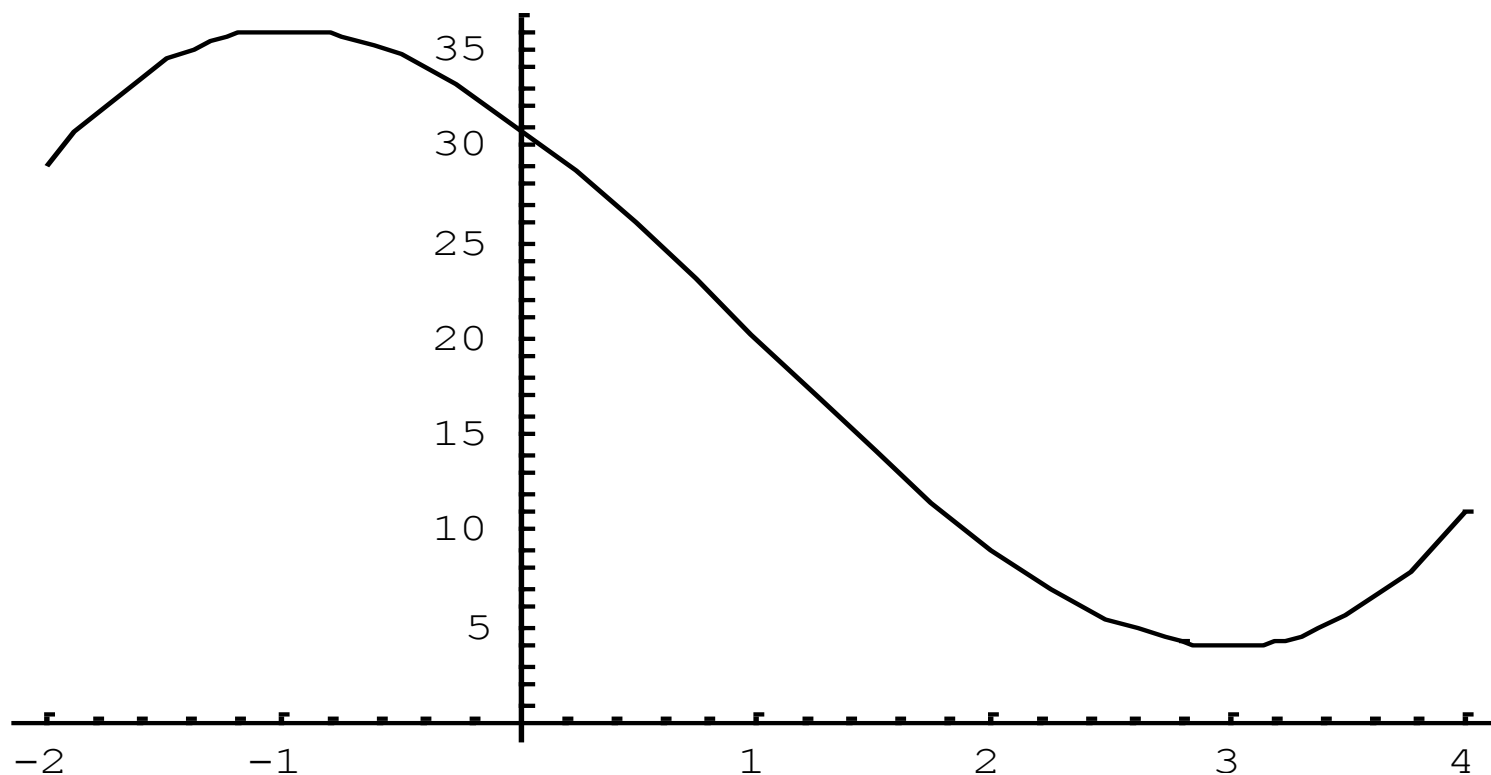


例5.3.2



求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 31$ 的极值.

解



求函数极值的方法和步骤如下：

- (1) 若题设中没有给出讨论的区间，则先求函数的定义域；
- (2) 求函数的一阶导数或二阶导数（选用极值第一充分条件进行判定时，可不求二阶导数）；
- (3) 求出函数在定义域或给定的区间内的全部驻点和不可导点；
- (4) 判定：若函数仅存在驻点且驻点处的二阶导数不为零，则可选用第二充分条件判定极值点，否则用第一充分条件进行判定。
- (5) 求出极值：若函数有极值点，则计算出相应的函数值，就是该函数的极值。

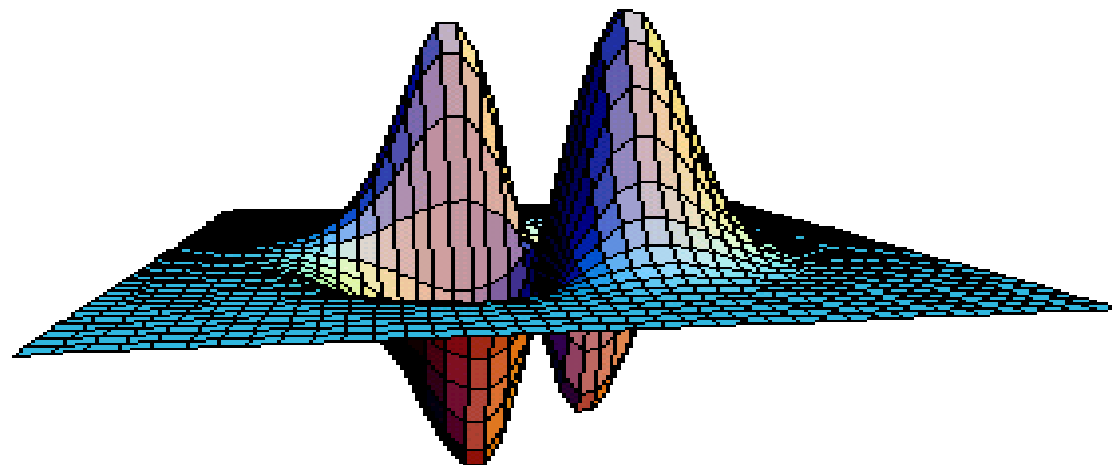


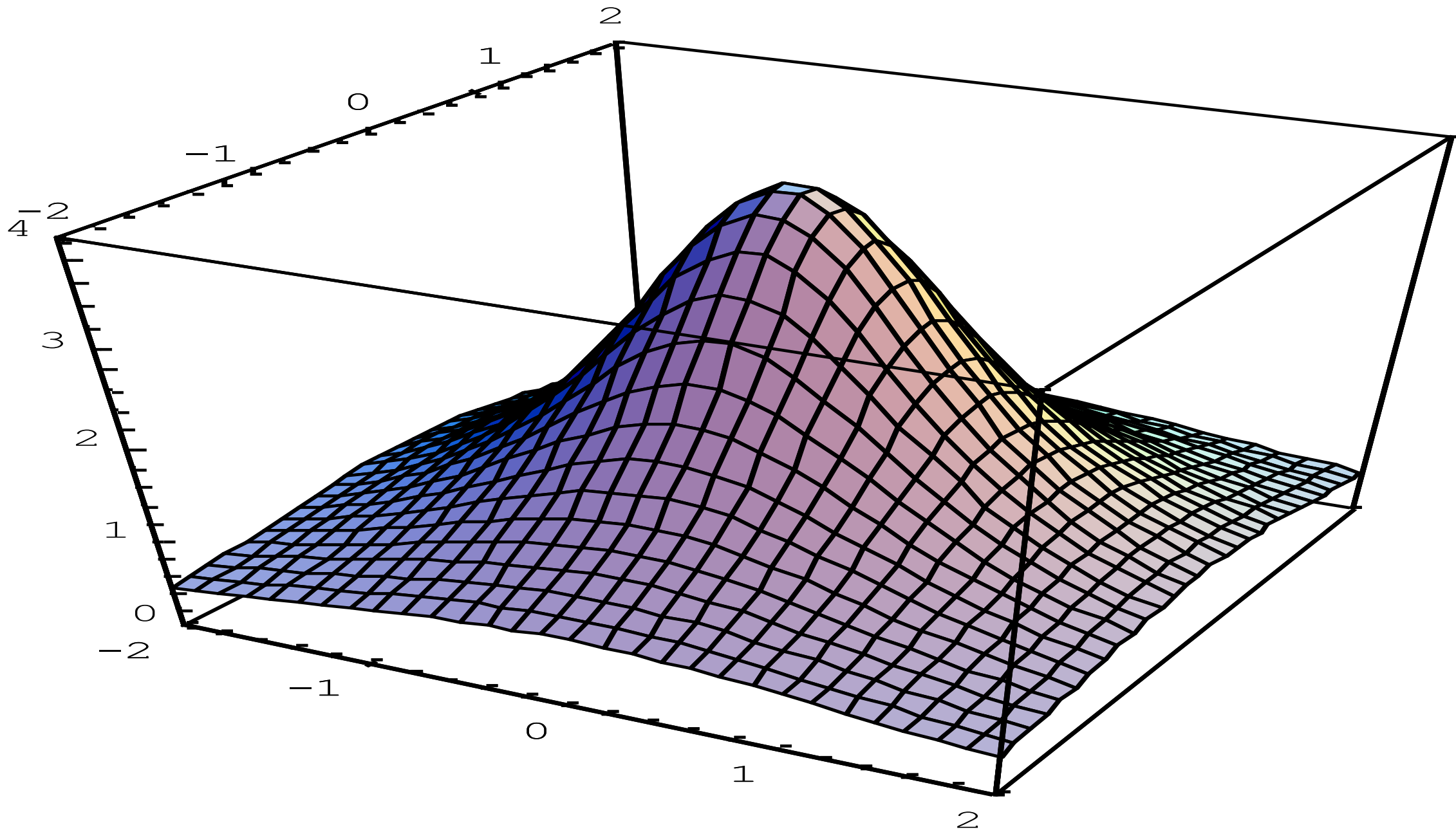
设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 及其附近有定义, (x, y) 是其中异于 (x_0, y_0) 的任意一点. 若 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极大值 $f(x_0, y_0)$, (x_0, y_0) 是函数的极大值点; 若 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值 $f(x_0, y_0)$, (x_0, y_0) 是函数的极小值点.

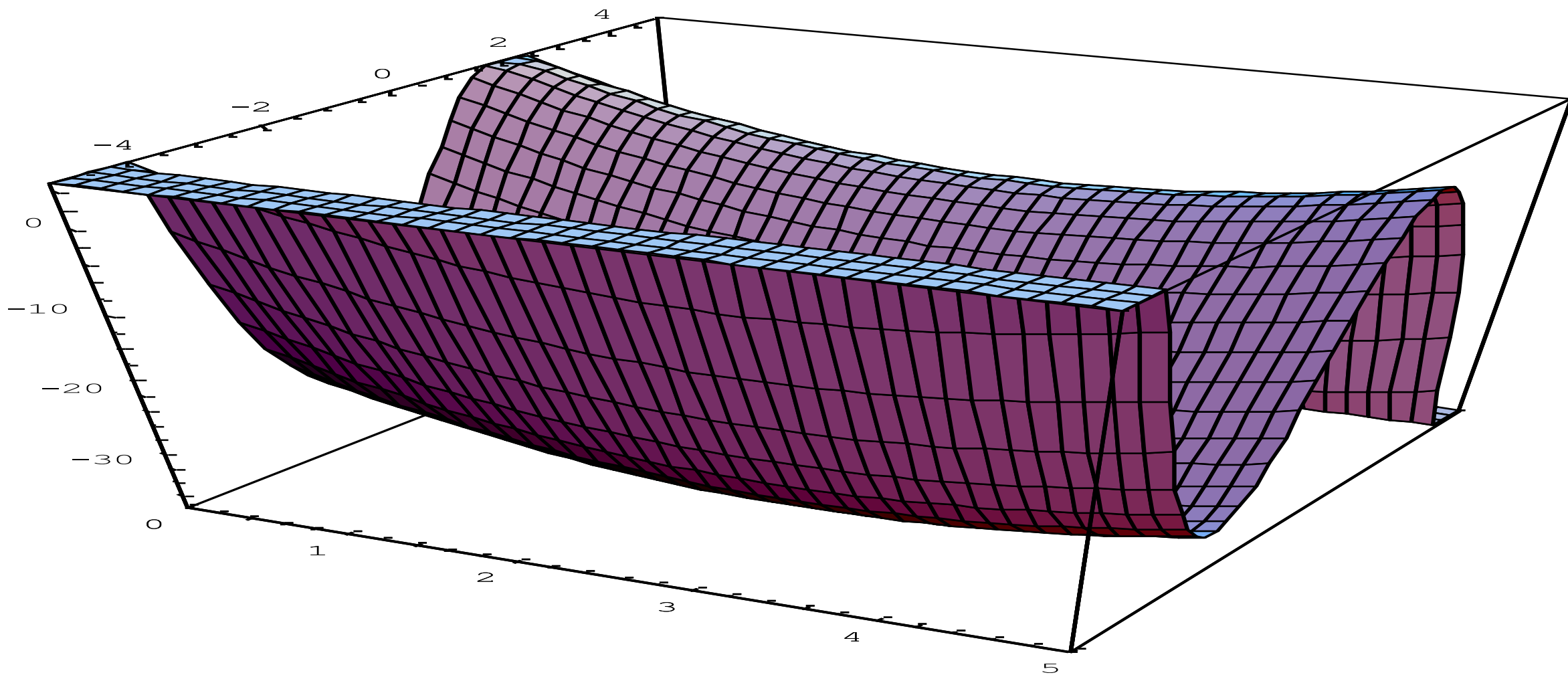
函数的极大值、极小值统称为极值, 函数的极大值点、极小值点统称为极值点.



观察二元函数 $z = -\frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ 的图形





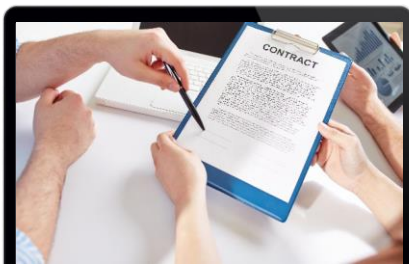


使 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ 同时成立的点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的驻点, 驻点不一定是极值点.

若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在一阶偏导数, 且 (x_0, y_0) 是极值点, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 且 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.



任务实施1 公司利润最大时两种生产要素的投入水平分析



某公司的生产函数是 $Q = 8L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}}$ ，若两种生产要素的投入价格分别是 $p_L = 4$ ， $p_K = 8$ ，而产品的价格 $p = 4$ ，试求使利润最大的两种要素的投入水平、产出水平和最大利润。



解

收入函数为 $R = p \cdot Q = 32L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}}$ ，

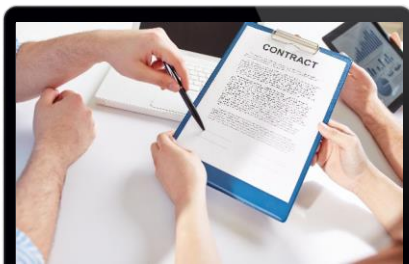
成本函数为 $C = p_L \cdot L + p_K \cdot K = 4L + 8K$ ，

于是，利润函数为 $Z = R - C = 32L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}} - 4L - 8K$ ，

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial L} = 16L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}} - 4 = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial K} = 8L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{4}} - 8 = 0 \end{cases} \quad , \text{ 可得 } \begin{cases} L = 64 \\ K = 16 \end{cases} ,$$



任务实施1 公司利润最大时两种生产要素的投入水平分析



某公司的生产函数是 $Q = 8L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}}$ ，若两种生产要素的投入价格分别是 $p_L = 4$ ， $p_K = 8$ ，而产品的价格 $p = 4$ ，试求使利润最大的两种要素的投入水平、产出水平和最大利润。



即函数有唯一驻点 $(64, 16)$ 。根据实际问题可知，利润 Z 一定有最大值，且利润函数 Z 在其定义域内只有一个驻点，所以当两种生产要素的投入量分别为 $L = 64$ ， $K = 16$ 时，利润 Z 有



最大值。此时，产出水平为 $Q = 8 \times 64^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{1}{4}} = 128$ ，最大利润为 $Z = 128$ 。

在讨论极值问题过程中，如果自变量在定义域内任意取值，未受任何条件限制，这样的极值问题称为无条件极值。如果对自变量的取值附加一定的约束条件，则称为条件极值，其中要求极值的函数称为目标函数，附加条件称为约束条件。

在约束条件下求目标函数的条件极值，常用两种方法：
代入法和拉格朗日乘数法。

所谓代入法是指从约束方程中解出某个未知量并代入目标函数，将条件极值问题转化为无条件极值来求解。



代入法求极值



求函数 $z = xy$ 在条件 $x + y = 2$ 的约束下的条件极值.

解

由约束条件 $x + y = 2$ 得到 $y = 2 - x$ ，代入目标函数并简化得 $z = 2x - x^2$

即令 $z' = 2 - 2x = 0$ ，可得唯一驻点 $x = 1$ ，没有不可导点，且 $z'' = -2 < 0$ ，

所以

函数 $z = xy$ 在条件 $x + y = 2$ 下的极大值 $z|_{(1,1)} = 1$ ，没有极小值。



拉格朗日乘数法

求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值的方法如下：

(1) 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ ，称此函数为拉格朗日函数，其中 λ 是待定常数，称为拉格朗日乘数。

(2) 求可能取极值的点

求 $F(x, y, \lambda)$ 对 x, y, λ 的偏导数，令其为零，得方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ F'_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

从中消去 λ ，解出 x, y ，则点 (x, y) 就是可能取得条件极值的点。

(3) 判定所求得的点 (x, y) 是否为极值点。

求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值的方法如下：

(1) 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ ，称此函数为拉格朗日函数，其中 λ 是待定常数，称为拉格朗日乘数。

(2) 求可能取极值的点

求 $F(x, y, \lambda)$ 对 x, y, λ 的偏导数，令其为零，得方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

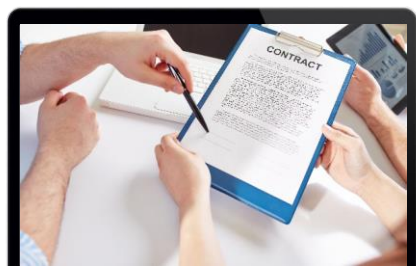
从中消去 λ ，解出 x, y ，则 (x, y) 就是可能取得条件极值的点。

(3) 判定所求得的点 (x, y) 是极值点。



训练任务2

公司在一定产量限制条件下成本最低分析



设亚诺公司某产品的生产函数和成本函数分别为

$$Q = 8L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}, \quad C = 2K + 12L$$

若产量 Q 为 16, 求使成本最低时两种要素的投入量及最低成本.



解

作辅助函数

$$F(K, L, \lambda) = 2K + 12L + \lambda \left(8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{4}} - 16 \right)$$

$$\begin{cases} F'_K = 2 + 4\lambda K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{4}} = 0 \\ F'_L = 12 + 6\lambda K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{4}} = 0 \\ F'_\lambda = 8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{4}} - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } K = 4, \quad L = 1.$$

最低成本是 $C = (2K + 12L)|_{(4,1)} = 20.$



拉格朗日乘数法求极值



设生产某产品的生产函数和成本函数分别为

$$Q = 8L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}, \quad C = 2K + 12L$$

若产量 Q 为 16, 求使成本最低时两种要素的投入量及最低成本.

解

作辅助函数

$$F(K, L, \lambda) = 2K + 12L + \lambda \left(8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{4}} - 16 \right)$$
$$\begin{cases} F'_K = 2 + 4\lambda K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{4}} = 0 \\ F'_L = 12 + 6\lambda K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{4}} = 0 \\ F'_\lambda = 8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{4}} - 16 = 0 \end{cases}$$

得 $K = 4, L = 1.$

最低成本是 $C = (2K + 12L)|_{(4,1)} = 20.$



小结

- 1/ 高阶导数的计算，特别是二阶导数
- 2/ 函数的单调性和曲线的凹凸性
- 3/ 函数极值的计算方法及应用

谢谢

