广东工程职业技术学院
UANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

经济数学

课程类型：专业基础课
授课对象：高职一年级学生
授课教师：张秀娟

广东工程职业技术学院
UANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

《经济数学》——公司经济事项分析

项目一　项目投资的决策评价

1.1　时间价值判断

1.6　收益流现值与终值的计算——定积分

训练任务1　　公司项目投资连续收益流的总收益现值的描述

佳元公司的一项投资连续 3 年内保持收益率为 10000 (元/年),且连续复利的年利率稳定在 6.5%，问其收益现值是多少.

训练任务2　　公司不均匀产出的总产量的描述

德凯特公司生产的一种产品在时刻 t 的总产量的变化率为 $f(t)=100+12t-0.6t^2$（单位/小时），求从 t 到 t 这两个小时的总产量．

应具备的数学知识

目录

CONTENTS

1 问题例引入

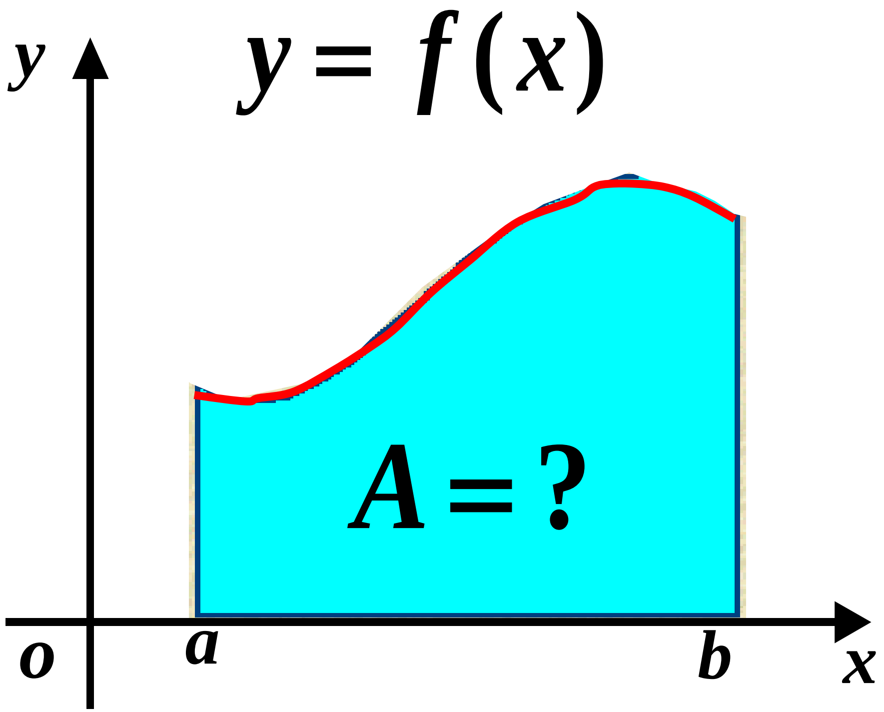
【实例1】 求曲边梯形的面积

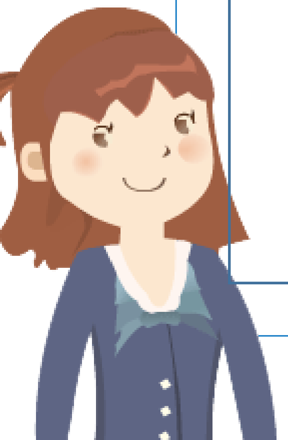
曲边梯形由连续曲线

$y = f(x)(f(x) \geq 0)$、

x轴与两条直线$x = a$、

$x = b$所围成.

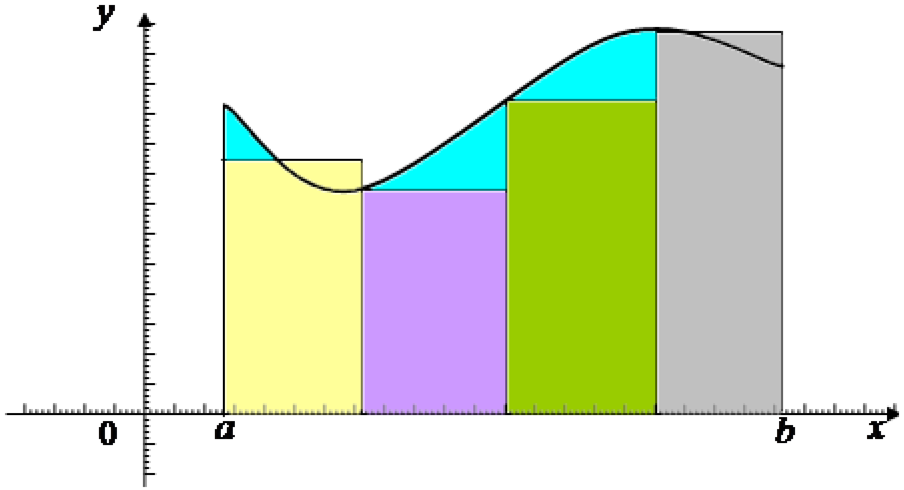




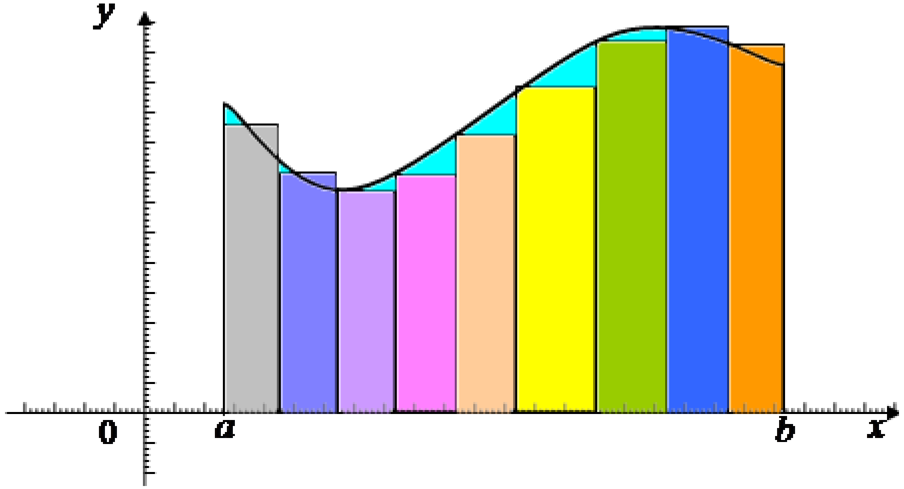
1 问题例引入

【实例1】 求曲边梯形的面积

用矩形面积近似取代曲边梯形面积

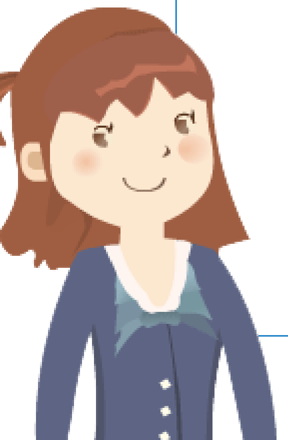


（四个小矩形）



（九个小矩形）

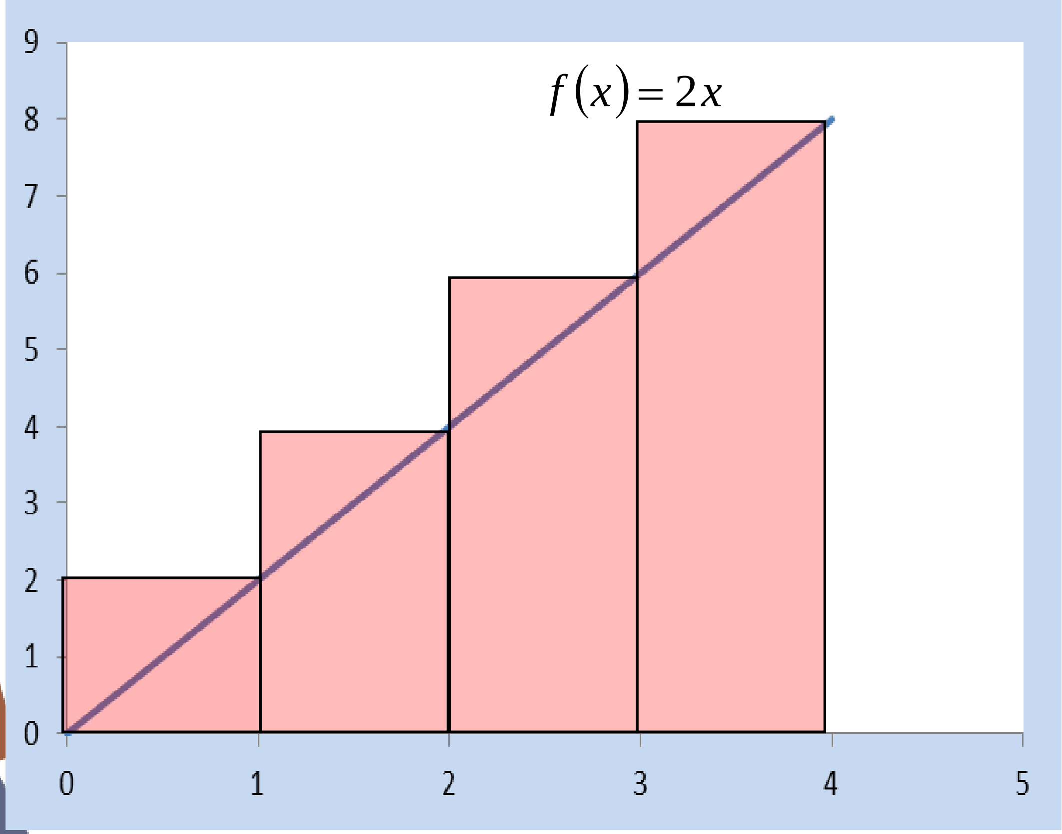
显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.



1 问题例引入

【实例1】 求曲边梯形的面积

求由曲线 $f(x)=2x$、x 轴与两条直线 $x=0$、$x=4$ 所围成的曲边梯形的面积



1. 把区间 $[0,4]$ 平均分成 4 个小区间，则每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac{4-0}{4}=1$；

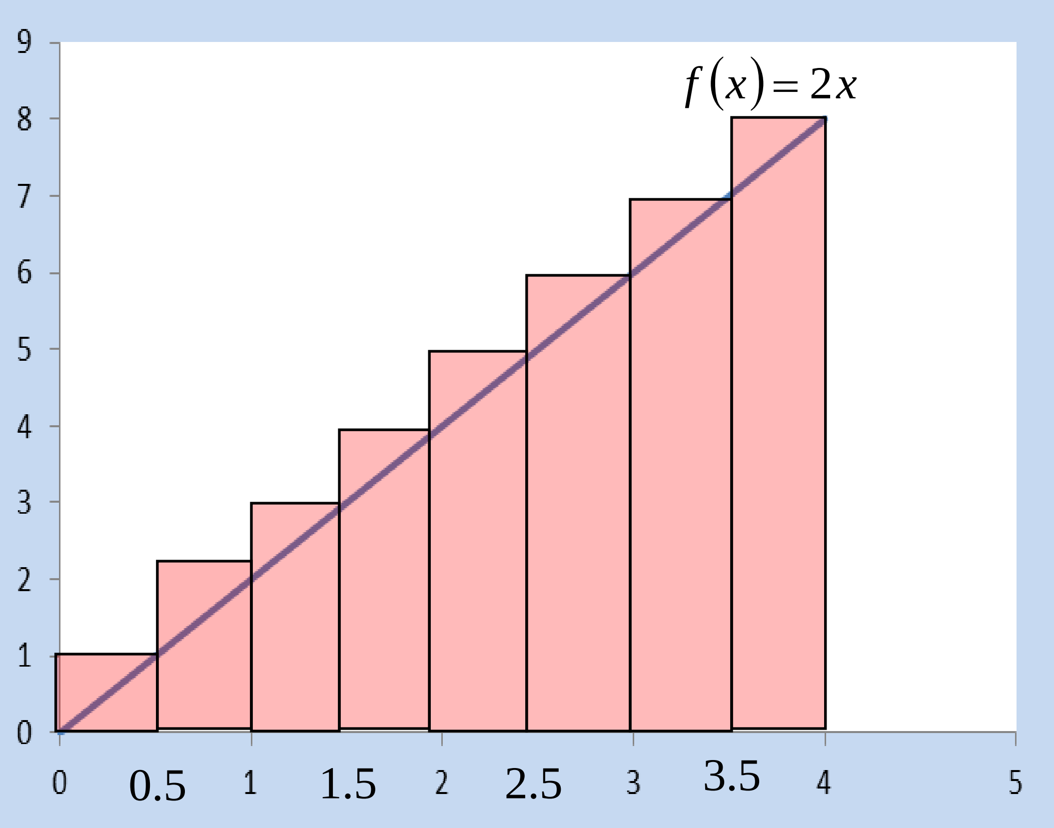
2. 以 $\Delta x=1$ 为底，分别以 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$ 为高的小矩形的面积和为

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(i)\times\Delta x \\
&= f(1)\times\Delta x+f(2)\times\Delta x+f(3)\times\Delta x+f(4)\times\Delta x \\
&= 2\times1+4\times1+6\times1+8\times1 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

1 问题例引入

【实例1】 求曲边梯形的面积

求由曲线 $f(x)=2x$、x轴与两条直线 $x=0$、$x=4$所围成的曲边梯形的面积

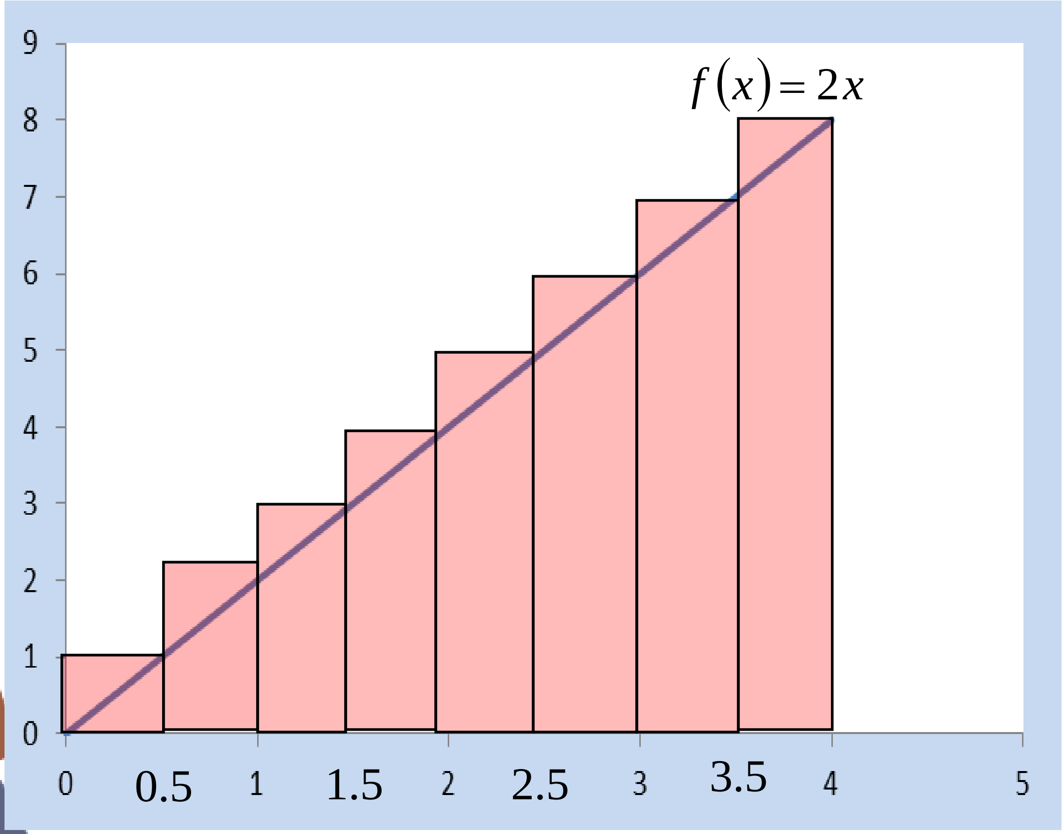


1. 把区间$[0,4]$平均分成8个小区间，则每个小区间的长度为$\Delta x=\dfrac{4-0}{8}=0.5$；

2. 以$\Delta x=0.5$为底，分别以$f(0.5)$、$f(1)$、$f(1.5)$、$f(2)$、$f(2.5)$、$f(3)$、$f(3.5)$、$f(4)$为高的小矩形的面积和为

【实例1】 求曲边梯形的面积

求由曲线 $f(x)=2x$、x 轴与两条直线 $x=0$、$x=4$ 所围成的曲边梯形的面积

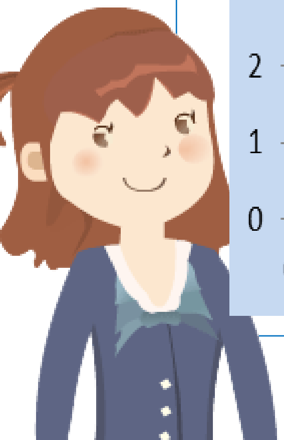


$$S_4=\sum_{i=1}^{8} f(i)\times\Delta x$$

$$=f(0.5)\times\Delta x+f(1)\times\Delta x+f(1.5)\times\Delta x+f(2)\times\Delta x+$$
$$f(2.5)\times\Delta x+f(3)\times\Delta x+f(3.5)\times\Delta x+f(4)\times\Delta x$$

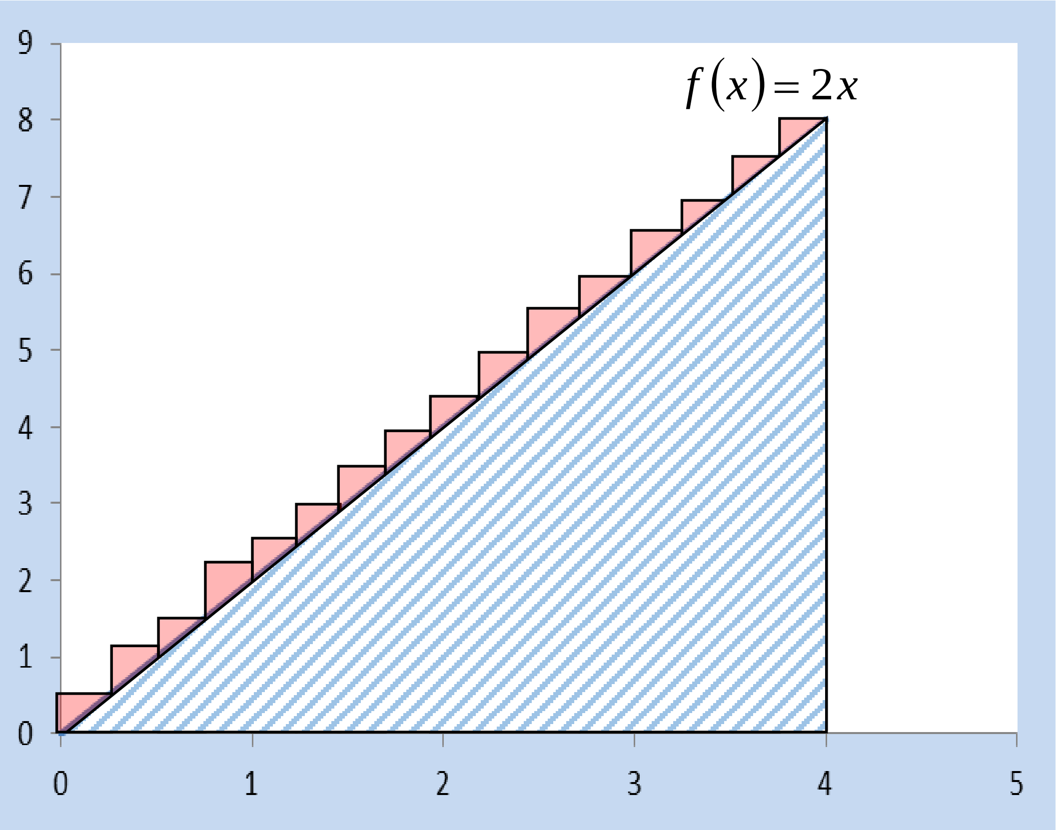
$$=2\times0.5\times0.5+2\times1\times0.5+2\times1.5\times0.5+2\times2\times0.5+$$
$$2\times2.5\times0.5+2\times3\times0.5+2\times3.5\times0.5+2\times4\times0.5$$

$$=18$$



【实例1】 求曲边梯形的面积

求由曲线 $f(x)=2x$、x 轴与两条直线 $x=0$、$x=4$ 所围成的曲边梯形的面积



$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(i\times\frac{4}{n}\right)\times\Delta x$$

$$=f\left(1\times\frac{4}{n}\right)\times\frac{4}{n}+f\left(2\times\frac{4}{n}\right)\times\frac{4}{n}+\cdots+f\left(n\times\frac{4}{n}\right)\times\frac{4}{n}$$

$$=2\times\left(1\times\frac{4}{n}\right)\times\frac{4}{n}+2\times\left(2\times\frac{4}{n}\right)\times\frac{4}{n}+\cdots+2\times\left(n\times\frac{4}{n}\right)\times\frac{4}{n}$$

$$=2\times\frac{4}{n}\times\frac{4}{n}(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=2\cdot\frac{16}{n^2}\cdot\left(\frac{n(1+n)}{2}\right)=\frac{16(1+n)}{n}$$

$$S=\lim_{n\to+\infty}\frac{16(1+n)}{n}=16$$

【实例1】 求曲边梯形的面积

1.分割： 曲边梯形如图所示，在区间$[a,b]$内插入若干个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

2.取近似： ——局部以直代曲，以小矩形的面积代替小曲边梯形的面积

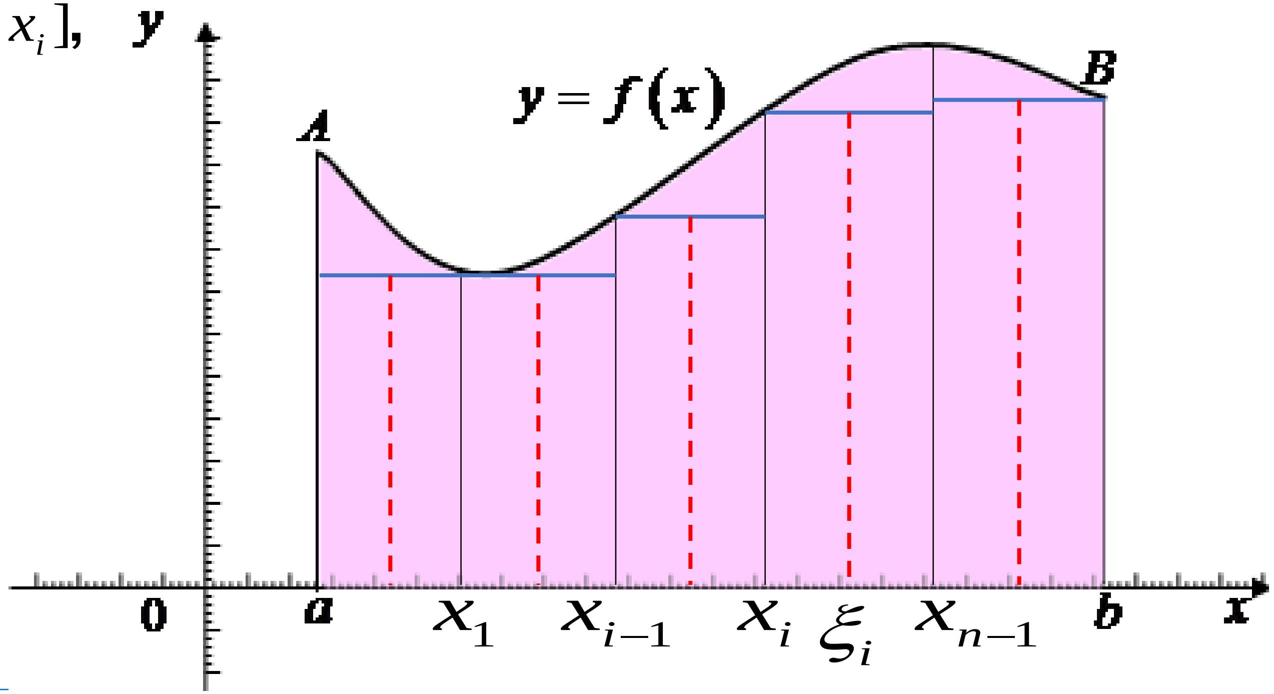
把区间$[a,b]$平均分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$，

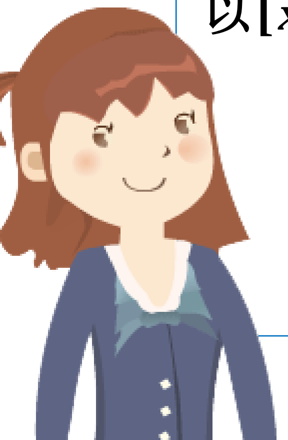
长度为 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$；

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，

以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x$$





【实例1】 求曲边梯形的面积

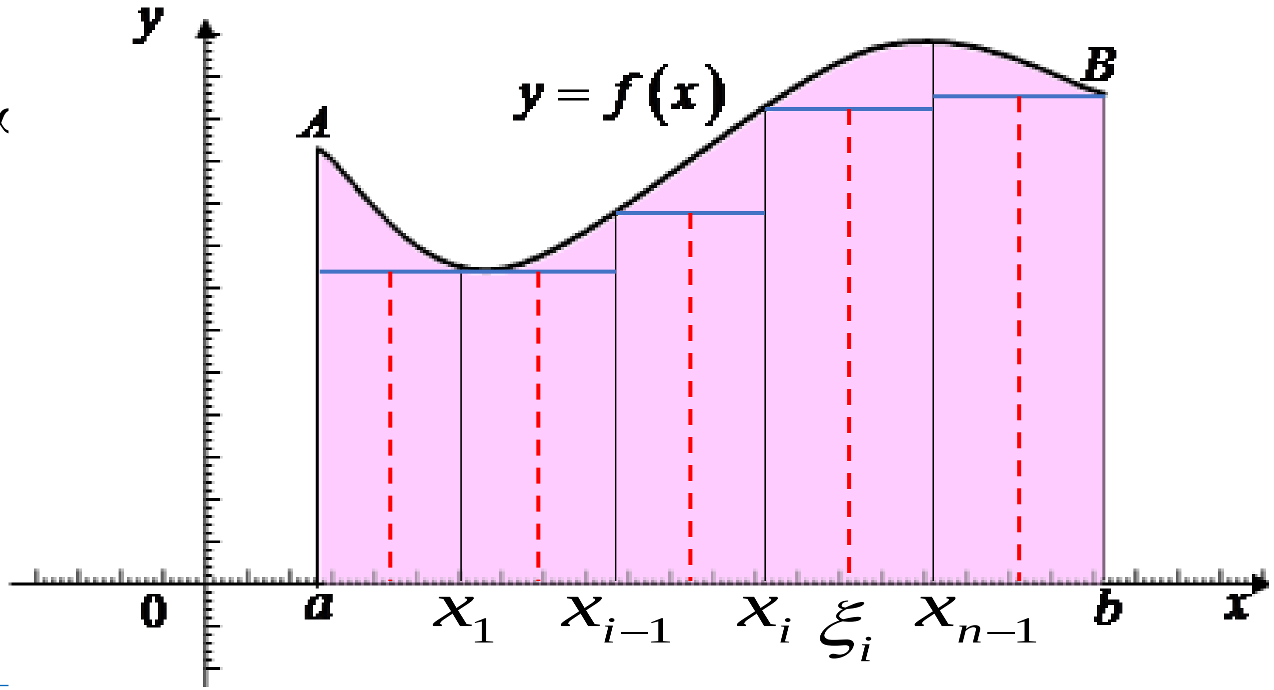
3.求和： 曲边梯形面积的近似值为

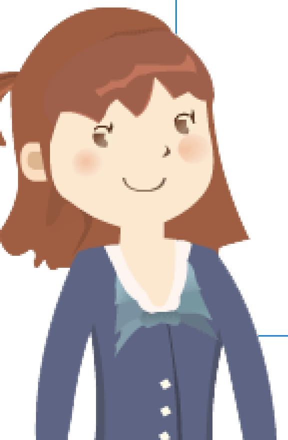
$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

4.取极限： 当分割无限加细, $n \to \propto$

曲边梯形面积为

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$





1 问题例引入

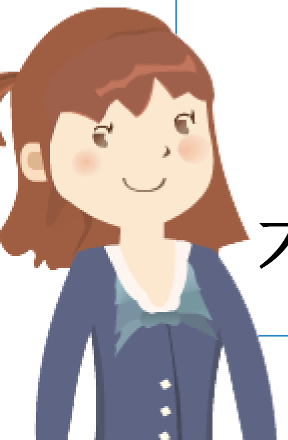
【实例2】 企业连续收益流的总收益

大型企业集团的收益是随时注入的. 因此, 这一收益可近似地表示为一个连续收益流,设 $p(t)$ 为收益流在时刻 t 的变化率(单位: 元/年) , 现需计算从现在 $t_0=0$ 到 T 年的总收益?

问题分析 如果企业的收益是均匀的, 收益 $p(t)$ 为常数, 于是

收益 = 变化率 × 时间　　即 $R=p(t)T$

现在已知企业的收益是非均匀的, 要求在 $[0,T]$ 间隔内的收益, 不能直接用均匀变化率的公式来计算.



1 问题例引入

【实例2】 企业连续收益流的总收益

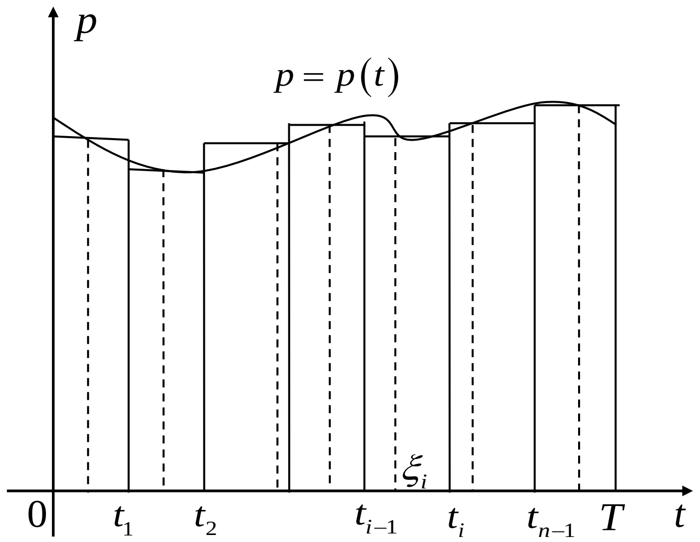
（1）分割 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T$ 得 $\Delta t=\dfrac{T-0}{n}=\dfrac{T}{n}$

（2）取近似： 以均匀代非均匀

$$R_i \approx p(\xi_i)\Delta t=\frac{T}{n}p\left(\xi_i\right).$$

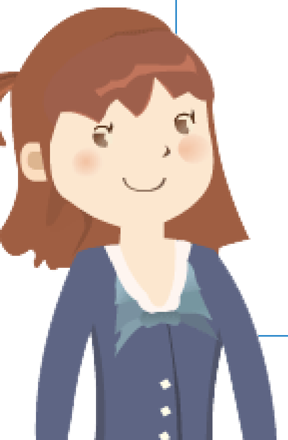
部分收益

某时刻收益流的变化率



（3）求和：积零为整 $R\approx R_1+R_2+R_3+\cdots+R_n=\sum_{i=1}^{n}p\left(\xi_i\right)\Delta t$

（4）取极限 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}p\left(\xi_i\right)\Delta t.$



【实例3】 不均匀产出的总产量

企业的产量是随时间 t 不断增加的. 若生产率是时间 t 的函数 $p(t)$ (单位: 件/小时) , 现需计算从现在 $t_0 = T_1$ 到 T_2 小时的总产量.

（1）分割 $\boldsymbol{T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2}$ $\quad \Delta t = \dfrac{T_2 - T_1}{n}$

（2）取近似：

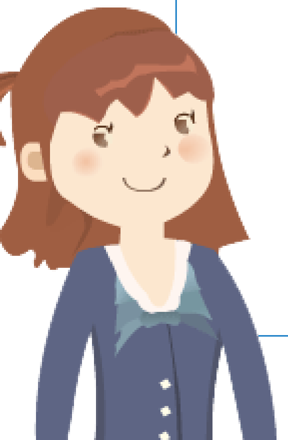
$$\Delta Q_i \approx p(\xi_i)\Delta t$$

部分产量

某时刻的生产率

（3）求和 $Q \approx \sum_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Delta t$

（4）取极限 $Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Delta t$



2 定积分的定义

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

将 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，小区间的长度为 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ $\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\,(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$，作乘积

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为**积分元素**，和式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**积分和**或**黎曼和**。

2 定积分的定义

定义 当$n\to\infty$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x$如果存在，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是**可积的**，并称此极限为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，记作

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x$$

2 定积分的定义

积分上限

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

$[a,b]$积分区间

2 定积分的定义

注意：

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

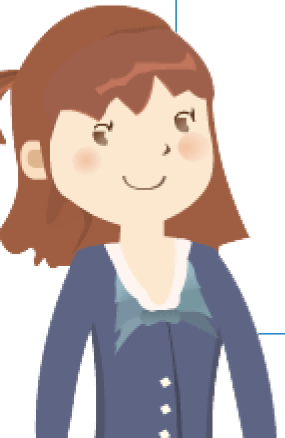
而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

（3）当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.



任务实施1　　公司项目投资连续收益流的总收益现值的描述

佳元公司的一项投资连续 3 年内保持收益率为 10000（元/年），且连续复利的年利率稳定在6.5%，问其收益现值是多少.

总收益现值为

$$R=\int_0^3 10000e^{-0.065t}dt$$

任务实施2　　公司不均匀产出的总产量的描述

德凯特公司生产的一种产品在时刻t的总产量的变化率为$f(t)=100+12t-0.6t^2$（单位/小时），求从$t=2$到$t=4$这两个小时的总产量．

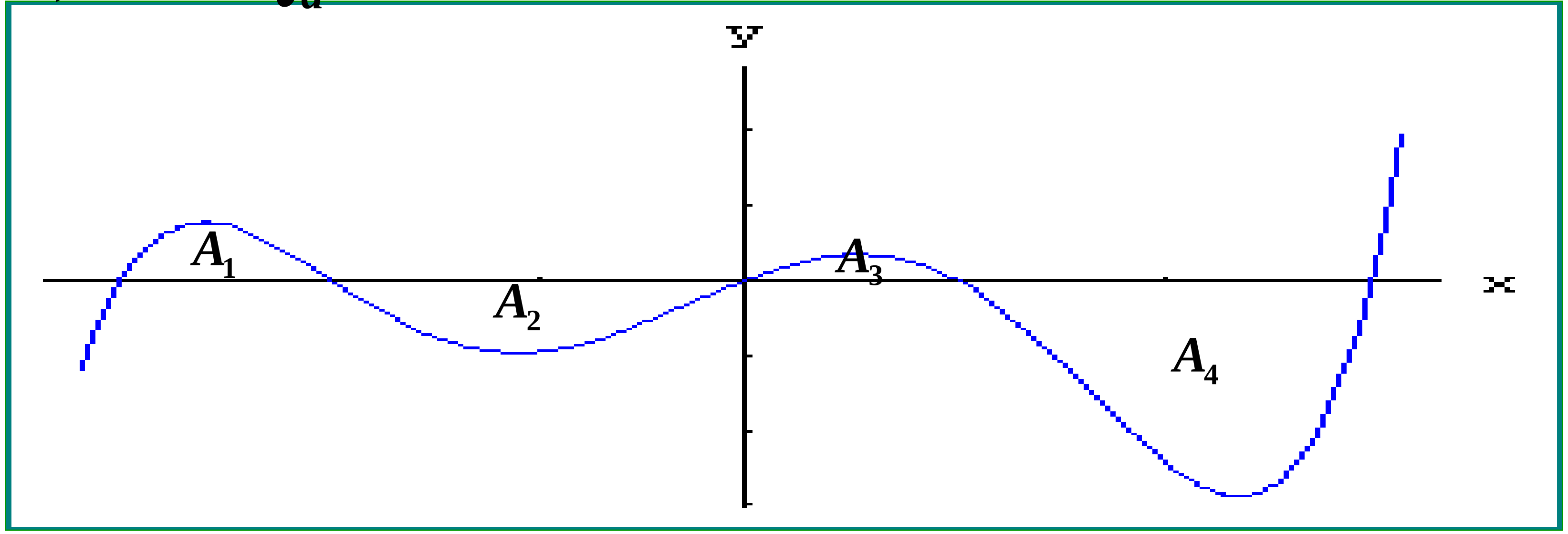
总产量为

$$Q=\int_2^4\left(100+12t-0.6t^2\right)dt$$

3 定积分的几何意义

$f(x)>0,\quad \int_a^b f(x)dx=A$ 曲边梯形的面积

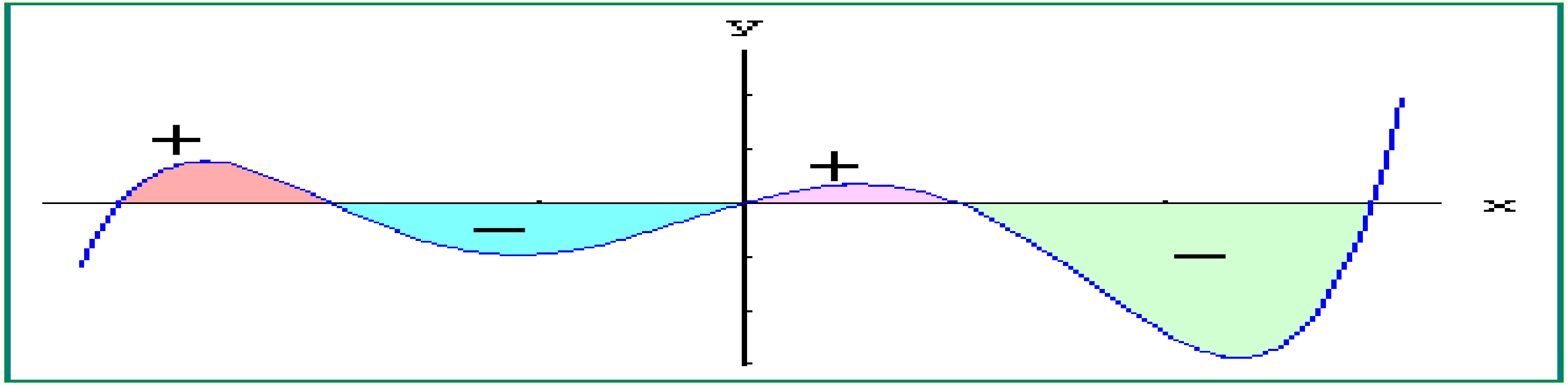
$f(x)<0,\quad \int_a^b f(x)dx=-A$ 曲边梯形的面积的负值



$$\int_a^b f(x)dx=A_1-A_2+A_3-A_4$$

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和．在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号．

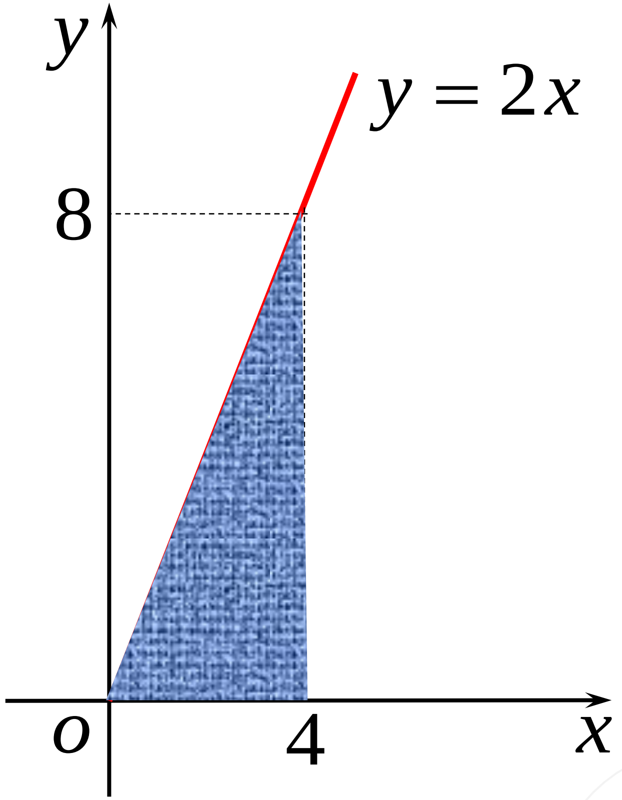


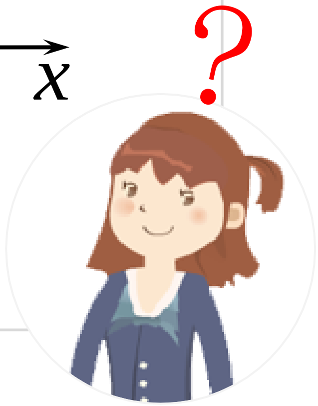
3 不定积分的几何意义

例　利用定积分的几何意义计算 $\int_0^4 2xdx$

解：　利用定积分的几何意义，如图

$$\int_0^4 2xdx = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$$





3 不定积分的几何意义

例　利用定积分的几何意义计算 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

解 所求定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ 等于

图 10 中上半单位圆的面积，即：

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

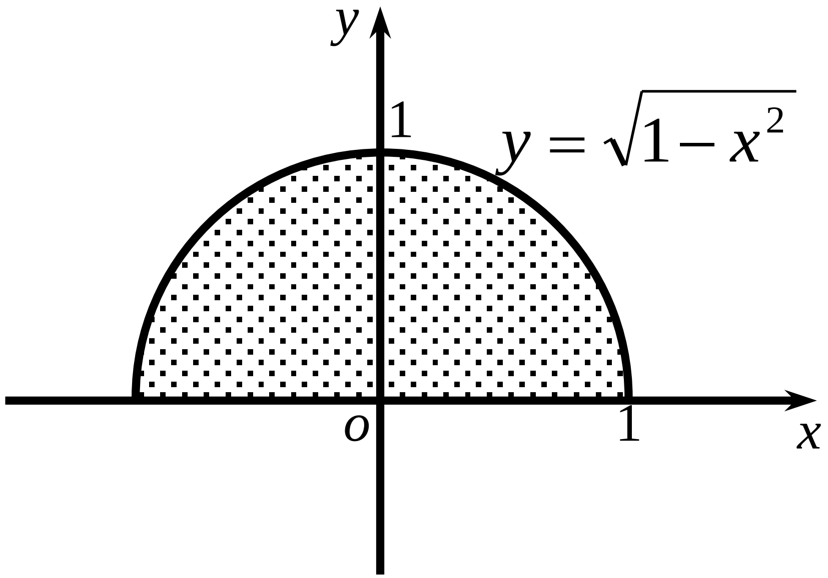


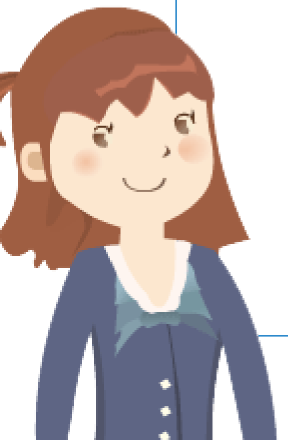
图 10

4 定积分定义的总结

1．**定积分的实质：特殊和式的极限．**

2．**定积分的思想和方法：**

分割	→	化整为零
⇓		⇓
求和	→	积零为整
⇓		⇓ 取极限
取极限	→	精确值——定积分



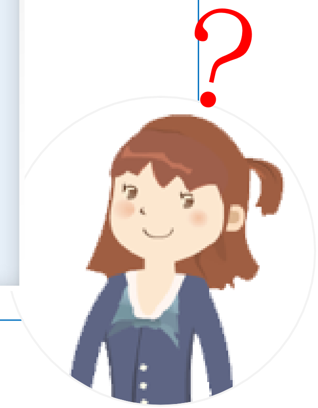
课堂思考与知识拓展

01

某企业拟投资200万元购置一批设备，年利率为10%，设在10年中该批设备（10年后完全失去价值）的均匀收益率50万元/年．求10年期间：该投资的纯收益贴现值；

由已知 $C=200$，$A(t)=50$，$r=10\%$，$T=10$，

故纯收益贴现值为 $L=\int_{0}^{10} 50e^{-0.1t}dt-200$



课堂思考与知识拓展

02

【**无限期纯收益现值**】有一个大型投资项目，投资成本为1000（万元），投资年利率为5%，每年的均匀收益为200（万元）．求该投资为无限期时的纯收益的现值(或称为投资的资本价值)．

无限期纯收益贴现值为

$$R=\int_0^T 200e^{-0.05t}dt=-\frac{200}{0.05}e^{-0.05t}\Big|_0^T=4\,000\left(1-e^{-0.05T}\right)$$

$$L=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t 200e^{-0.05t}dt-1000$$

课堂思考与知识拓展

03

【**平均利率**】银行的利息连续计算，利率是时间t（单位：年）的函数$r(t)=0.08+0.015\sqrt{t}$，求在开始 2 年，即时间间隔$[0,2]$内的平均利率.

平均利率为

$$L=\frac{\int_0^2\left(0.08+0.015\sqrt{t}\right)dt}{2-0}$$

课堂思考与知识拓展

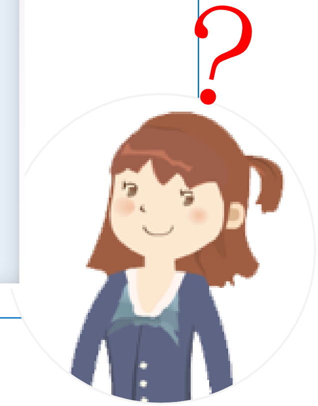
03

【利润平均变化率】 某公司运行 t 年(单位：年)年获利润为 $L(t)$ 万元，利润的年变化率为 $L'(t)=3\times10^5\sqrt{t+1}$（元/年）求利润从第 4 年初到第 8 年末，即时间间隔 $[3,8]$ 内的年平均变化率.

由已知得从第 4 年初到第 8 年末的总利润为

$$L=\int_4^8 L'(t)dt=\int_4^8\left(3\times10^5\sqrt{t+1}\right)dt$$

所以平均利润为 $$L=\frac{\int_4^8 L'(t)dt}{8-3}=\frac{\int_4^8\left(3\times10^5\sqrt{t+1}\right)dt}{5}$$

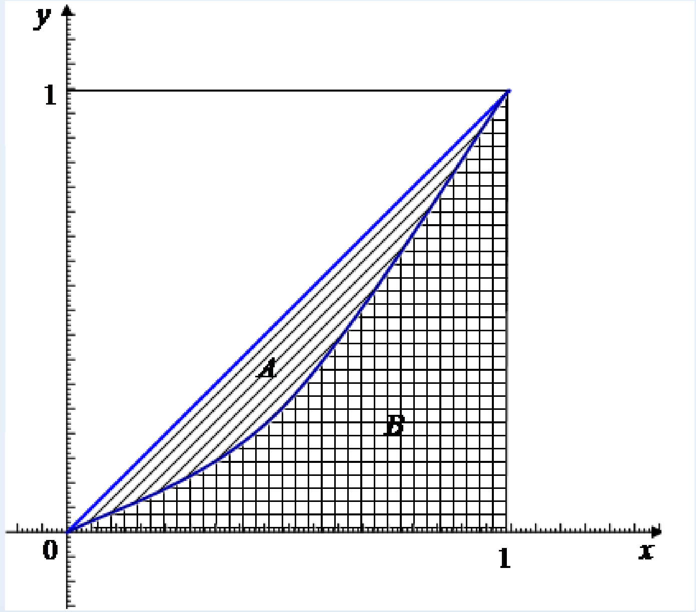


课堂思考与知识拓展

05

某国某年国民收益在国民之间分配的洛伦茨曲线可近似地 $y=x^2$, $x\in[0,1]$ 表示，试求该国的基尼系数.

$$G=\frac{\int_0^1\left(x-x^2\right)dx}{\frac{1}{2}}$$



小结

1. 运用定积分可描述连续资金收益流的总量、现值与终值
2. 运用定积分可描述不均匀产出的总产量
3. 运用定积分可描述由边际求的总量的总量
4. 运用定积分可描述曲边梯形的面积

谢谢

y
$y=x^2$
$x=y^2$
x
原式$=\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy$
$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^5)\,dx$
$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6)\Big|_0^1$
$=\frac{1}{12}$