



广东工程职业技术学院

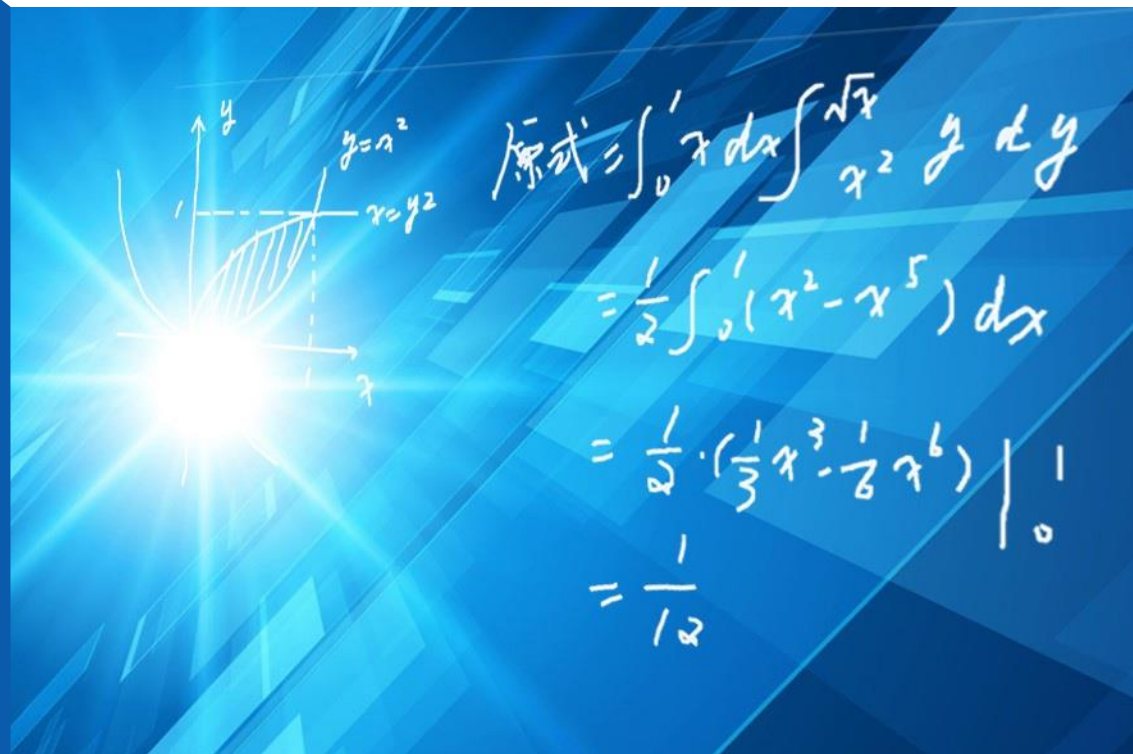
GUANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

经济数学

课程类型：专业基础课

授课对象：高职一年级学生

授课教师：张秀娟





广东工程职业技术学院

GUANGDONG ENGINEERING POLYTECHNIC

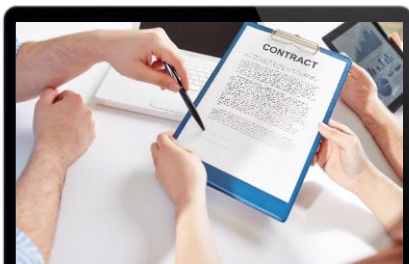
《经济数学》——公司经济事项分析

—— 项目2 经济模型的建立 ——

2.2 由边际求经济模型——不定积分

训练任务1

由边际需求模型求需求模型



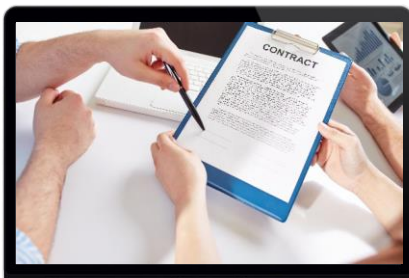
设某商品的需求量 Q 是价格 p 的函数 $Q=Q(p)$,最大需求量为5 000. 已知边际需求量

$$Q'(p) = -5000 \left(\frac{1}{2} \right)^p \cdot \ln 2,$$

求需求量与价格的函数关系式 $Q=Q(p)$.

训练任务2

由边际成本模型求总成本模型



已知佳锐公司的某产品边际成本函数

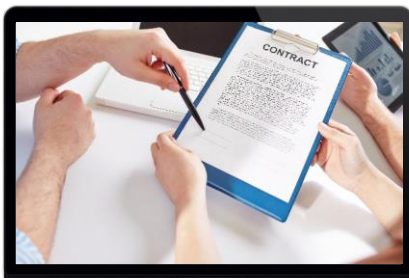
$$C'(p) = q^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2000},$$

且生产 10000 件产品的总成本是 1200 百元, 求

总成本函数 $C(q)$.

训练任务3

运用边际进行产品最大利润的分析



某家电企业生产的某款 4K 高清液晶电视机的

边际成本为 $C'(Q) = 0.02Q + 10$ (万元/百台),

边际收益为 $R'(Q) = 30 - 0.02Q$ (万元/百台),

固定成本为 100 万元 ,

试求该电视机的利润函数 $L(Q)$,并讨论最大利润问题 .

6.1 不积分

目录 CONTENTS

- 1 / 不定积分概念
- 2 / 不定积分的直接积分法

►【实际问题3.1】西红柿的需求量

某菜市场西红柿的日需求量 q 是价格 p 的函数，且边际需求 $Mq = -6$ ，西红柿的最大日需求量为 80kg ，求西红柿日需求量 q 与价格 p 的函数关系。

解

设 $q = q(p)$ ，又由边际需求

$$MQ = -6, \quad \text{即} \quad \frac{dq}{dp} = q'(p) = -6$$

于是得 $q(p) = -6p + C$

由 $q(0) = 80$ 得 $C = 80$ ，

故 $q(p) = -6p + 80$ 是西红柿日需求量 q 与价格 p 的函数。



设函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对于 I 上每一点 x , 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

例如: x^3 是 $3x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个原函数

$x^3 - 3$ 是 $3x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个原函数

$-\cos x$ 是 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个原函数



定理 3.1 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的所有原函数

定理 3.2 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 只相差一个任意常数.

例如: x^3 是 $3x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个原函数

$x^3 - 3$ 是 $3x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个原函数

$-\cos x$ 是 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个原函数



【例 6.1.1】 求函数 $f(x) = 3^x$ 的一个原函数.

解 $\because (3^x)' = 3^x \ln 3, \quad \text{得} \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right)' = 3^x,$

所以 $f(x) = 3^x$ 的一个原函数是 $\frac{3^x}{\ln 3}$.



【例 6.1.2】 求函数 $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \neq 1$) 的所有原函数.

解 $\because (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 得 $\left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$,

所以 $f(x) = x^\alpha$ 的所有原函数是 $\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$.



在区间 I 内, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 内的 **不定积分**, 记为 $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号 被积函数 被积表达式 积分变量 任意常数



例如 求下列不定积分

$$\int x^5 dx ;$$

$$\int x dx ;$$

$$\int \sqrt{x} dx ;$$

$$\int \frac{1}{x^4} dx ;$$

$$\int dx ;$$

$$\int t^3 dt .$$



【例如 1】 由导数的基本公式,写出下列函数的不定积分

$$(1) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$(2) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$



1.2

不定积分的定义

基本积分表

$$(1) \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数});$$

$$(2) \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$



说明: $x > 0, \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$

$$x < 0, [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}, \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C,$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

简写为

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$



$$(4) \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(5) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$(6) \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$



【例6.1.5】 设曲线通过点 $(1, 2)$ ，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程.

解 设曲线方程为 $y = f(x)$,

根据题意知 $\frac{dy}{dx} = 2x$,

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

$$\because \int 2x dx = x^2 + C, \quad \therefore f(x) = x^2 + C,$$

由曲线通过点 $(1, 2) \Rightarrow C = 1$,

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

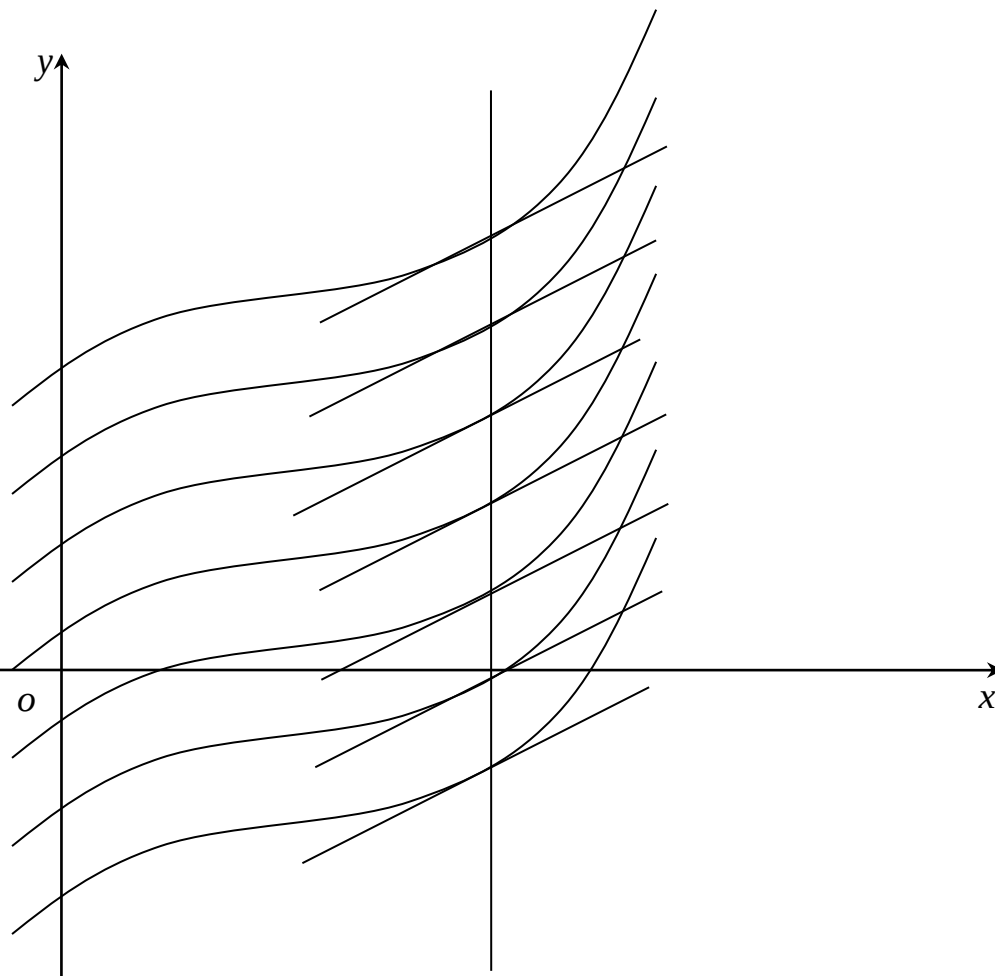


1.3

不定积分的几何意义

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

求不定积分得到一积分曲线族.



性质3.1

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad \text{或} \quad d\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)dx,$$

性质3.2

$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \text{或} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$



性质3.3

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

性质3.4

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx. \quad (k \text{ 是常数, } k \neq 0)$$



【例 6.1.6】 求下列函数的不定积分.

(1) $\int 5\sin x dx;$

(2) $\int \left(x^3 - \frac{3}{x} \right) dx;$

(3) $\int (\sqrt{x} + 2x - 5) dx.$



【例 6.1.6】求下列函数的不定积分.

$$(1) \int 5 \sin x dx = -5 \cos x + C$$

$$(2) \int \left(x^3 - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{4} x^4 - 3 \ln|x| + C$$

$$(3) \int (\sqrt{x} + 2x - 5) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 - 5x + C$$



【例 6.1.7】 某产品在时刻 t (小时) 的总产量 Q 的变化率为 $Q'(t) = 50 + 24\sqrt{t}$, 且已知 $t = 0$ 时产量为 0, 求此产品的产量 Q 与时间 t 的函数关系 $Q(t)$.

解 因为总产量的变化率为 $Q'(t) = 50 + 24\sqrt{t}$, 故

$$Q(t) = \int Q'(t) dt = \int (50 + 24\sqrt{t}) dt = 50t + 16t\sqrt{t} + C.$$

又 $t = 0$ 时 $Q(0) = 0$, 代入上式得 $C = 0$, 从而

$$Q(t) = 50t + 16t\sqrt{t}.$$



【例 6.1.8】 求下列不定积分.

$$(1) \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx ;$$

$$(2) \int \left(2^x - x^2 - \frac{3}{x} + 3 \right) dx ;$$



【例 6.1.8】求下列不定积分.

$$\begin{aligned}(1) \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

$$(2) \int \left(2^x - x^2 - \frac{3}{x} + 3 \right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{3} x^3 - 3 \ln|x| + 3x + C$$



01

设某商品的需求量 Q 是价格 p 的函数 $Q = Q(p)$, 最大需求量为 5 000
已知边际需求量

$$Q'(p) = -5000 \left(\frac{1}{2} \right)^p \cdot \ln 2,$$

求需求量与价格的函数关系式
 $Q = Q(p)$.

解

由边际需求函数的定义知

$$Q'(p) = -5000 \left(\frac{1}{2} \right)^p \times \ln 2,$$

故

$$Q(p) = \int \left[-5000 \left(\frac{1}{2} \right)^p \ln 2 \right] dp = 5000 \left(\frac{1}{2} \right)^p + C,$$

因为当 $p = 0$ 时 $Q(0) = 5000$, 代入上式得 $C = 0$, 于是
需求量与价格的函数关系式为

$$Q(p) = 5000 \left(\frac{1}{2} \right)^p.$$



02

已知佳锐公司的某产品边际成本函数

$$C'(p) = q^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2000},$$

已知10 000 件产品的总成本是1 200 百元, 求总成本函数 $C(q)$.

解

由已知得总成本函数为

$$\begin{aligned} C(p) &= \int \left(q^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2000} \right) dq \\ &= 2q^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2000} + C. \end{aligned}$$

已知 $C(10000) = 1200$, 代入上式得 $C = 995$,

因此总成本函数为

$$C(p) = 2q^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2000} + 995.$$



03

某家电企业生产的某款 4K 高清液晶电视机的边际成本为

$$C'(Q) = 0.02Q + 10 \text{ (万元/百台)}$$

边际收益为

$$R'(Q) = 30 - 0.02Q \text{ (万元/百台)}$$

固定成本为 100 万元，试求该电视机的利润函数 $L(Q)$ ，并讨论最大利润问题。

解

由已知得总成本函数为

$$\begin{aligned} C(Q) &= \int C'(Q) dQ = \int (0.02Q + 10) dQ \\ &= 0.01Q^2 + 10Q + C_1 \end{aligned}$$

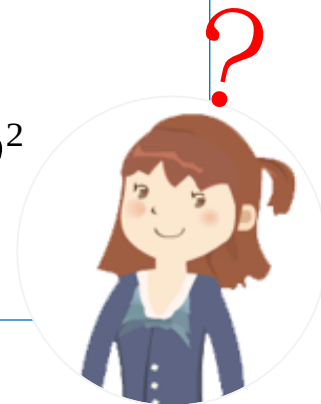
由固定成本为 100 万元，即 $C(0) = 100$ ，解得

$C_1 = 100$ ，故总成本函数为

$$C(Q) = 0.01Q^2 + 10Q + 100.$$

总收益函数为

$$R(Q) = \int (30 - 0.02Q) dQ = 30Q - 0.01Q^2$$

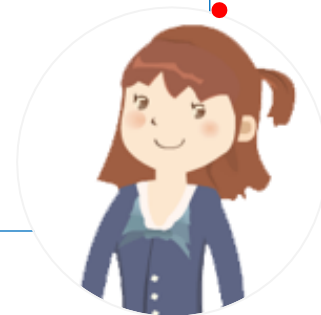


【例 6.1.11】 某家电企业生产的某款 4K 高清液晶电视机的边际成本为 $C'(Q) = 0.02Q + 10$ (万元/百台), 边际收益为 $R'(Q) = 30 - 0.02Q$ (万元/百台) 固定成本为 100 万元, 试求该电视机的利润函数 $L(Q)$, 并讨论最大利润问题.

解

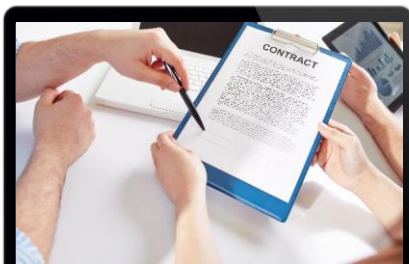
于是, 该电视机的总利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= (30Q - 0.01Q^2) - (0.01Q^2 + 10Q + 100) \\ &= -0.02Q^2 + 20Q - 100 \quad (Q \in \mathbb{Z}^+). \end{aligned}$$

令 $L'(Q) = -0.04Q + 20 = 0$, 解 $Q = 500$ (百台),又因为 $L''(500) = -0.04 < 0$, 所以 $Q = 500$ (百台) 时, 利润最大, 其值为 $L(500) = 4900$ 万元.

训练任务3

由边际成本模型求总成本模型



某产品成本函数 若一企业生产某产品的

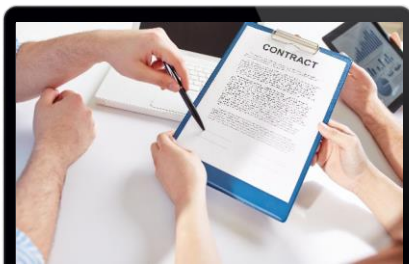
边际成本是产量 q 的函数为 $C'(q) = 5e^{0.2q}$,

固定成 $C(0) = 90$ 求总成本函数.



训练任务4

由边际需求求需求模型



某商品需求量 q 是价格 p 的函数，根据市场调查分析，该类商品市场最大需求量为 100 单位，已知边际需求函数为

$$q'(p) = -\frac{30}{p+1},$$

试建立该商品市场需求量与价格的函数关系，

为定价决策提供数据依据。

应具备的数学知识

目录 CONTENTS

1 / 微分

2 / 不定积分的换元法

1 微分的定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x 可导，则称 $f'(x)\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分，记为 dy 或 $df(x)$ ，即

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

此时，称函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微。

当 $f'(x) \neq 0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时，有 $\Delta y \approx dy$ ，即

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

这表明函数 $y = f(x)$ 的自变量在点 x 处取得微小改变量时， Δy 可以用 dy 近似。



微分计算公式

由于函数 $y = x$ 的微分是 $dx = x' \Delta x = \Delta x$, 所以有

$$dy = f'(x)dx.$$





思考：计算下列微分



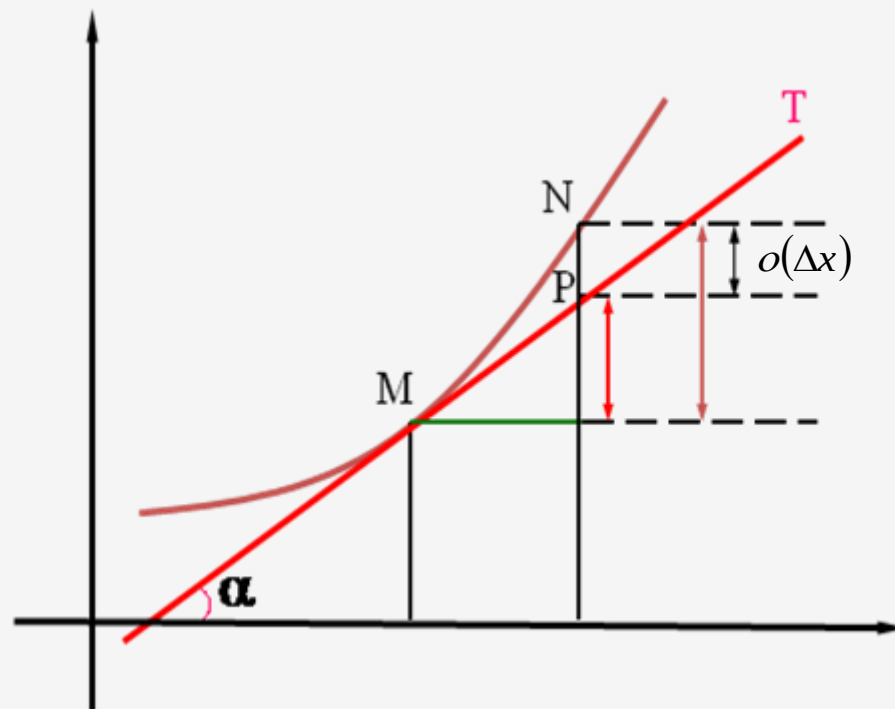
$$d(3 - x^2 + \ln x) = ?$$

$$d(2^x) = ?$$

$$d\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) = ?$$

2. 微分的几何意义

当 Δy 是曲线的纵坐标增量时, dy 就是切线纵坐标对应的增量. 当 $|\Delta x|$ 很小时, 在点 M 的附近切线 MP 可近似代替曲线段 MN



3. 初等函数的微分及微分的四则运算

(1) 基本初等函数的微分公式

$$(1) d(C) = 0$$

$$(3) d(a^x) = a^x \ln a dx$$

$$(5) d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$(2) d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$$

$$(4) d(e^x) = e^x dx$$

$$(6) d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$





课堂练习

计算下列微分：

$$(1) \ d\left(\frac{2}{3}x^4\right)$$

$$(2) \ d(e^{2x})$$

$$(3) \ d(x+1)$$





课堂练习

计算下列微分：

$$(1) \ x^4 dx = d(\quad)$$

$$(2) \ e^{2x} dx = d(\quad)$$

$$(3) \ (x+1)dx = d(\quad)$$

$$(4) \ dx = d(\quad)$$



求下列不定积分：

$$(1) \int e^u du$$

$$(2) \int e^{2x} d(2x)$$

$$(3) \int e^{2x} dx$$



$$\int e^{2x} dx = \int e^{2x} \cdot \frac{1}{2} d(2x) = \frac{1}{2} \int e^{2x} d(2x) \quad (\text{凑微分})$$

$$\underline{\underline{\text{令 } 2x = u}} \quad \frac{1}{2} \int e^u du \quad (\text{变量替换})$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C \quad (\text{求不定积分})$$

$$\underline{\underline{\text{还原 } u = 2x}} \quad \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad (\text{变量还原})$$



一般地, 有

$$\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \quad (\text{凑微分}) \\ &= \int f(u)du \quad (\text{换元 } \varphi(x)=u) \\ &= F(u)+C \quad (\text{求不定积分}) \\ &= F[\varphi(x)]+C \quad (\text{变量还原 } u=\varphi(x)) .\end{aligned}$$

称以上这种积分方法为**第一换元积分法**, 又称为**凑微分法**.



【例6.1.12】求 $\int (3-2x)^9 dx$

解

$$\int (3-2x)^9 dx \xrightarrow{\text{恒等变形}} \int (3-2x)^9 \left[-\frac{1}{2}(3-2x) \right]' dx$$

$$\xrightarrow{\text{凑微分}} -\frac{1}{2} \int (3-2x)^9 d(3-2x)$$

$$\xrightarrow{\text{换元 } 3-2x=u} -\frac{1}{2} \int u^9 du$$

$$\xrightarrow{\text{求不定积分}} -\frac{1}{20} u^{10} + C$$

$$\xrightarrow{\text{变量还原}} -\frac{1}{20} (3-2x)^{10} + C .$$



求 $\int \frac{1}{3x+1} dx$

$$\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x+1} d(3x+1)$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{3} \ln|u| + C$$



任务实施1

由边际成本模型求总成本模型

某产品成本函数 若一企业生产某产品的边际成本是产量 q 的函数
为 $C'(q) = 5e^{0.2q}$, 固定成 $C(0) = 90$ 求总成本函数.

$$\text{由边际成本 } C'(q) = 5e^{0.2q}, \quad C(q) = \int 5e^{0.2q} dq = 5e^{0.2q} + C$$

$$\text{又 } C(0) = 90 \quad \text{得 } C(q) = 5e^{0.2q} + 65 .$$



任务实施 由边际需求求需求模型

02

某商品需求量 q 是价格 p 的函数，根据市场调查分析，该类商品市场最大需求量为 100 单位，已知边际需求函数为

$$q'(p) = -\frac{30}{p+1}, \text{ 试建立该商品}$$

市场需求量与价格的函数关系，
为定价决策提供数据依据。

解

因为 $q'(p) = -\frac{30}{p+1}$ ，两边取不定积分得

$$\begin{aligned} q(p) &= \int q'(p) dp = -\int \frac{30}{p+1} dp \\ &= -30 \ln(p+1) + C, \end{aligned}$$

再由 $q(0) = 100$ ，代入上式，求得 $C = 100$ ，所以
该商品市场需求量与价格的函数关系为

$$q(p) = -30 \ln(p+1) + 100.$$



小结

- 1/ 运用不定积分，由边际成本可求总成本函数
- 2/ 运用不定积分，由边际需求可求需求函数
- 3/ 运用不定积分，由边际收入可求总收入函数
- 4/ 运用不定积分，由边际利润可求利润函数，并进行利润最大化分析

谢谢

