

2. 逻辑代数

2.1 逻辑代数

2.2 逻辑函数的化简法

教学基本要求

- 1、熟悉逻辑代数常用基本定律、恒等式和规则。
- 2、掌握逻辑代数的变换；

2.1 逻辑代数

2.1.1 逻辑代数的基本定律和恒等式

2.1.2 逻辑代数的基本规则

2.1.3 逻辑函数的变换及代数化简法

2.1 逻辑代数

逻辑代数又称**布尔代数**。它是分析和设计现代数字逻辑电路不可缺少的数学工具。逻辑代数有一系列的定律、定理和规则，用于对数学表达式进行处理，以完成对逻辑电路的化简、变换、分析和设计。

逻辑关系指的是事件产生的条件和结果之间的因果关系。在数字电路中往往是将**事情的条件**作为**输入信号**，而**结果**用**输出信号**表示。条件和结果的两种对立状态分别用逻辑“1”和“0”表示。

2.1.1 逻辑代数的基本定律和恒等式

1. 变量与常量之间的关系

$$\text{定理 1} \quad A \cdot 0 = 0, \quad A + 1 = 1$$

$$\text{定理 2} \quad A \cdot 1 = A, \quad A + 0 = A$$

2. 变量自身之间的关系

$$\text{定理 3} \quad A \cdot A = A, \quad A + A = A$$

$$A \cdot \overline{A} = 0, \quad A + \overline{A} = 1$$

$$\text{定理 4} \quad \overline{\overline{A}} = A$$

定理 5：还原律

3. 在对逻辑表达式进行变换时，可以使用普通的交换律、结合律和分配律来变换其形式。

定理 6：交换律

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

定理 7：结合律

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

定理 8：分配律

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

4. 特殊公式和定理:

定理 9 : 吸收律

$$A + A \cdot B = A \quad , \quad A(A + B) = A$$

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B \quad , \quad \overline{A \cdot A + B} = A + B$$

定理 10 : 恒等式

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

$$AB + \overline{A}C + BCDE = AB + \overline{A}C$$

在“与或”逻辑式中，一个与项包含了另外两个含有互为反变量的与项的其余部分，则该与项是多余的（项）。

定理 11：反演律

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

例 证明 $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ · $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

列出等式、右边的函数值的真值表

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{A+B}$
0	0	1	1	$0+0=1$	1	1	$0 \cdot 0 = 1$	1
0	1	1	0	$0+1=0$	0	1	$0 \cdot 1 = 1$	1
1	0	0	1	$1+0=0$	0	1	$1 \cdot 0 = 1$	1
1	1	0	0	$1+1=0$	0	0	$1 \cdot 1 = 0$	0

逻辑代数的基本定律

名称	公式 1	公式 2
0—1律	$A \cdot 1 = A$ $A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$
互补律	$\overline{A \cdot A} = 0$	$\overline{A + A} = 1$
重叠律	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
交换律	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
结合律	$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
分配律	$A(B + C) = AB + AC$	$A + (BC) = (A + B)(A + C)$
反演律	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
吸收律	$A(A + B) = A$ $A(A + B) = AB$	$A + AB = A$ $A + AB = A + B$
还原律	$\overline{\overline{A}} = A$	
恒等式	$AB + AC + BC = AB + AB$	$AB + AC + BCDE = AB + AB$

2.1.2 逻辑代数的基本规则

1 代入规则：在包含变量 A 的逻辑等式中，如果用另一个函数式代入式中所有 A 的位置，则等式仍然成立。这一规则称为**代入规则**。

例： $B(A + C) = BA + BC$ ，

用 $A + D$ 代替 A ，得

$$B[(A + D) + C] = B(A + D) + BC = BA + BD + BC$$

代入规则可以扩展所有基本公式或定律的应用范围

2 对偶规则：

对于任何逻辑函数式，若将一个逻辑函数 L 进行下列变换：

I： $\cdot \rightarrow +, + \rightarrow \cdot$

II： $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$
 L

所得新函数表达式叫做 L 的**对偶式**，用 L' 表示。

例：逻辑函数 $L = (A + \bar{B})(A + C)$ 的对偶式为

$$L' = \bar{A}B + AC$$

当某个逻辑恒等式成立时，则该恒等式两侧的对偶式也相

。这就是对偶规则。利用对偶规则，可从已知公式中得到更多的
运算公式，例如，吸收律

3. 反演规则：

对于任意一个逻辑表达式 L ，若将一个逻辑函数 L 进行下列变换：

I： $\cdot \rightarrow +, + \rightarrow \cdot$ ；

II： $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$ ；

III：原变量 $\rightarrow$ 反变量，反变量 $\rightarrow$

原变量，

所得新函数表达式叫做 L 的反函数，用 $\bar{L}$ 表示。

例 2.1.1 试求 $L = AB + CD + 0$ 的非函数

解：按照反演规则，得

$$\bar{L} = (A + B) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \cdot 1 = (A + B)(\bar{C} + \bar{D})$$

例

求函数 $\overline{A+C+B\overline{D}}$

解:

的反函数 $L = (A+C) \cdot (B+D)$

例

求函数 $A \cdot B + C + D$

的反函数:

解:

$L = A + B - C - D$

在应用反演规则求反函数时要注意以下两点:

- (1) 保持运算的优先顺序不变, 必要时加括号表明;
- (2) 变换中, 几个变量 (一个以上) 的公共非号保持不变。

2.1.3 逻辑函数的代数法化简

1. 逻辑函数式的常见形式： 一个逻辑函数的表达式不是唯一的，除了与—或式外，还有或—与式、与非—与非式、或非—或非及与—或—非式。可以有多种形式，并且能互相转换。例如：

$$L = AC + AB$$

与—或表达式

$$= (A+B)(\bar{A}+C)$$

或—与表达式

$$= AC \cdot AB$$

与非—与非表达式

$$= \overline{\overline{A+B} + \overline{A+C}}$$

或非—或非表达式

$$= AC + AB$$

与—或—非表达式

其中，与—或表达式是逻辑函数的最基本表达形式。

2. 逻辑函数的最简“与—或”表达式的标准

- 与项最少，即表达式中乘积项最少。
- 每个乘积项中的变量数最少。

3. 用代数法化简逻辑函数：即运用逻辑代数的基本定律和恒等式进行化简的方法。

(1) 并项法：运用公式 $A + \overline{A} = 1$ 将两项合并为一项，消去一个变量。

例：

$$L = A(BC + \overline{B}C) + A(\overline{B}C + BC)$$

$$ABC + A\overline{B}C + A\overline{B}C + ABC$$

$$= AB(C + \overline{C}) + A\overline{B}(C + \overline{C})$$

$$= AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$$

(2) 吸收法: $A + AB = A$

$$L \quad \overline{AB} + \overline{AB}CD(E+F) = \overline{AB}$$

(3) 消去法: $A + AB = A + B$

$$L \quad \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + (\overline{A} + \overline{B})C = \overline{A} + \overline{B} + \overline{AB}$$

$$\overline{AB} + \overline{ABC} = \overline{AB} + C$$

$$\overline{A} + \overline{AB} = \overline{A} + B$$

(4) 配项法: $A + \overline{A} = 1$

例 2.1.6 $L \quad \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} + (\overline{A} + \overline{A})\overline{BC}$

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{ABC} + \overline{ACB}$$

$$= (\overline{AB} + \overline{ABC}) + (\overline{AC} + \overline{ACB})$$

$$= \overline{AB} + \overline{AC}$$

例 2.1.7 化简 $L = AD + AD + AB + AC + BD + ABCE + BEF$
解

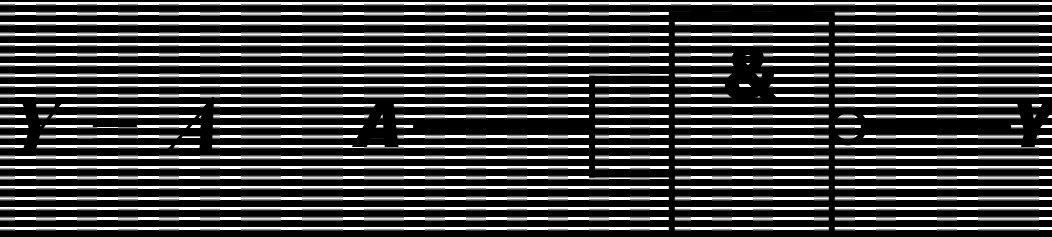
$$L = A + AB + AC + BD + ABCE + BEF$$

$$= A + AC + BD + BEF \quad (\text{利用 } A + AB = A)$$

$$= A + C + BD + BEF \quad (\text{利用 } A + AC = A + C)$$

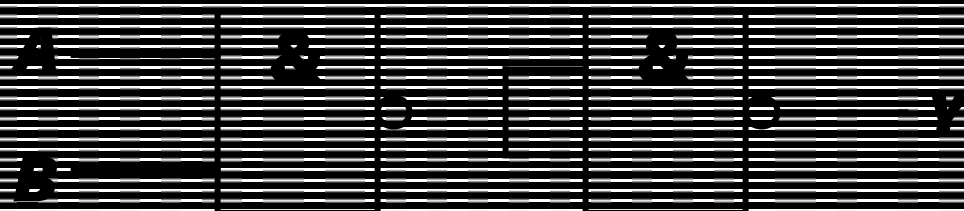
2. 用“与非”门构成基本门电路

(1) 应用“与非”门构成“非”门电路



(2) 应用“与非”门构成“与”门电路

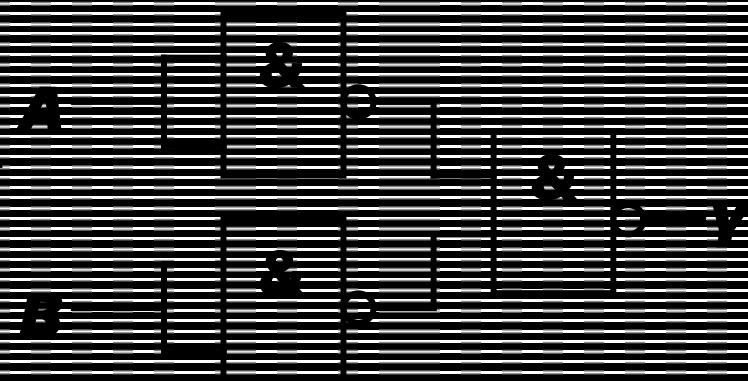
由逻辑代数运算法则： $Y = AB = \overline{\overline{AB}}$



(3) 应用“与非”门构成“或”门电路

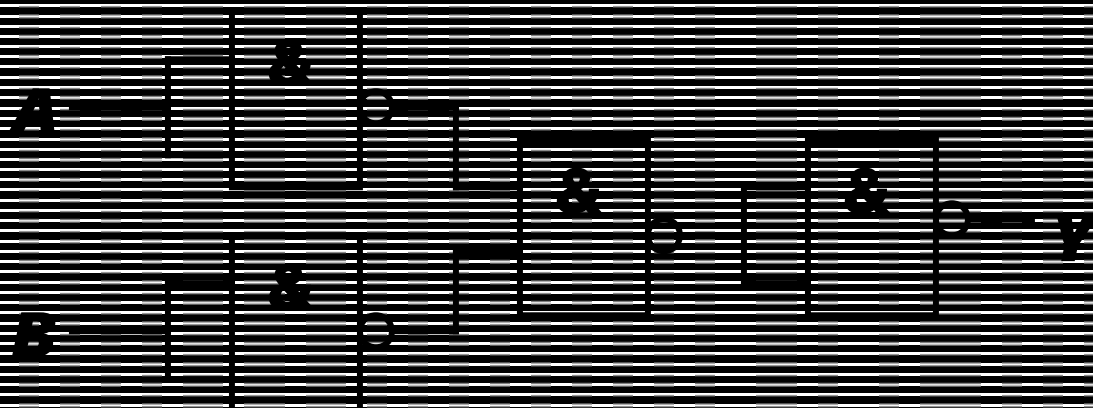
由逻辑代数运算法则：

$$Y = A + B = A + B = A \cdot B$$



(4) 用“与非”门构成“或非”门

由逻辑代数运算法则： $Y = A + B = A B = A B$



例 2.1.8 已知逻辑函数表达式为

$$L = ABD + AB\bar{D} + A\bar{B}D + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$$

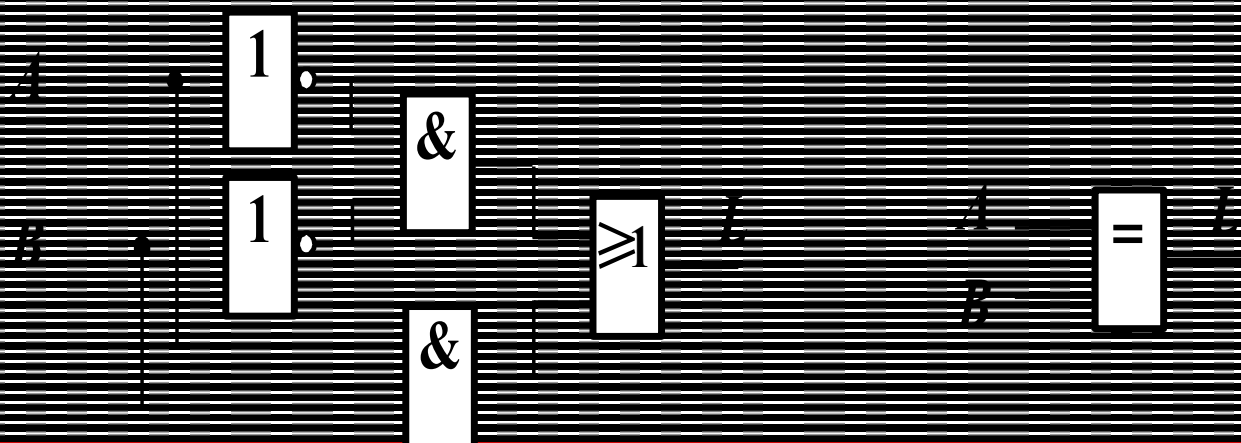
要求：(1) 最简的与-或逻辑函数表达式，并画出相应的逻辑图；

(2) 仅用与非门画出最简表达式的逻辑图。

解：

$$= AB + AB\bar{D} + A\bar{B}D$$

$$= AB + AB(D + \bar{D}) = AB + AB$$



例 2.1.8 已知逻辑函数表达式为

$$L = ABD + AB\bar{D} + A\bar{B}D + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$$

要求：(1) 最简的与-或逻辑函数表达式，并画出相应的逻辑图；

(2) 仅用与非门画出最简表达式的逻辑图。

解：

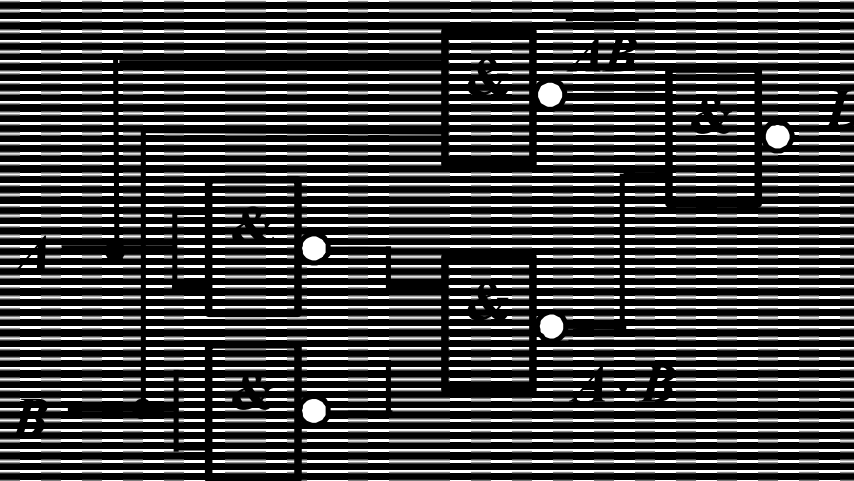
$$= AB + ABD + AB\bar{D}$$

$$= AB + AB(D + \bar{D})$$

$$= AB + AB$$

$$= AB + AB$$

$$= AB \cdot \overline{AB}$$



例 2.1.9 试对逻辑函数表达式 $L = \overline{A}BC + A\overline{B}C$

进行变换，仅用或非门画出该表达式的逻辑图。

解：

$$L = \overline{A}BC + A\overline{B}C = \overline{A}BC + A\overline{B}C$$

$$= A + B + C + A + B + C$$

$$= A + B + \overline{C} + A + B + C$$

